

One

BASIC TOPICS AND NOMENCLATURE

1-1 Basic Time-Dependent Phenomena in Nuclear Reactors

* Time-dependent phenomena in nuclear reactors

1. short time phenomena: milliseconds to seconds
2. medium time phenomena: over hours or days
3. long time phenomena: over several months or years

=> These time-dependent phenomena basically include changes in the neutron flux and the reactor systems.

* feedback

: flux changes -> changes in the reactor -> "act back" on the flux

* Since short, medium, and long time phenomena are physically different phenomena resulting in different sets of equations, different concepts and solution approaches are utilized.

1-2 Kinetics Versus Dynamics

* dynamics vs. fuel cycle problems

dynamics	a few authors	all time-dependent phenomena
fuel cycle problems	most authors	long time phenomena to represent a separate category

* short time phenomena

1. kinetics, for the entire class of short time phenomena
2. dynamics, for the entire class of short time phenomena
3. dynamics, as a general heading for the entire class of short time phenomena, with two subheadings:
 - (a) kinetics, for short time phenomena without feedback
 - (b) dynamics, in the narrower sense, for short time phenomena with feedback.

=> **used in this book**

Two

DELAYED NEUTRONS

- * In static reactor problems
 - 총 핵분열중성자수를 고려함.
 - 핵분열중성자 중 일부가 지발중성자라는 사실이 중요하지 않음.
- * 중성자속의 시간 의존성은 수초 ~ 수분 지연되어 생성되는 소량의 핵분열중성자에 의해서도 크게 영향 받는다.
- * In kinetics problems
 - 소량이라 하더라도 kinetics phenomena에서는 지배적인 역할을 할 수 있다.
 - 지발중성자 생성율을 상세히 고려하여야 한다.
- * kinetics problems에서의 동위원소 고려
 - 몇몇 동위원소들은 $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$ -fueled thermal reactors at higher burnup과 plutonium-fueled fast reactors에서 지발중성자 생성에 상당히 기여한다.
- * 본 절에서는 지발중성자 생성의 에너지 의존성과 동위원소에 대하여 논의한다.
 - 지발중성자의 특성을 나타내는 자료는 kinetics equations을 이론적으로 구성함에 있어 특히 중요하다.

2-1 Production of Prompt and Delayed Neutrons Through Nuclear Fission

- * 핵분열 결과로 생성되는 거의 모든 중성자들은 “즉시”, 즉 지연없이 방출된다.
 - 일반적으로 $E^* > E_{Bn}$.
 - 즉발중성자들은 핵분열 이후 the "direct" fission products에서 즉시 방출된다.
- * Fig. 2-1: 즉발중성자 생성 과정
 - 일반적인 붕괴시간: 10^{-15}s or less → 무시할 수 있음.
 - $E^* > E_{Bn}$ → γ 방출, 중성자 방출
 - prompt fission neutrons의 평균 개수: ν_p
- * fission → 2개의 방사성 핵종
 - ↳ 몇몇의 즉발중성자
 - ↳ 몇몇의 감마선
- * the resultant fission product nuclei에서 직접 추가 중성자를 방출할 수는 없다.

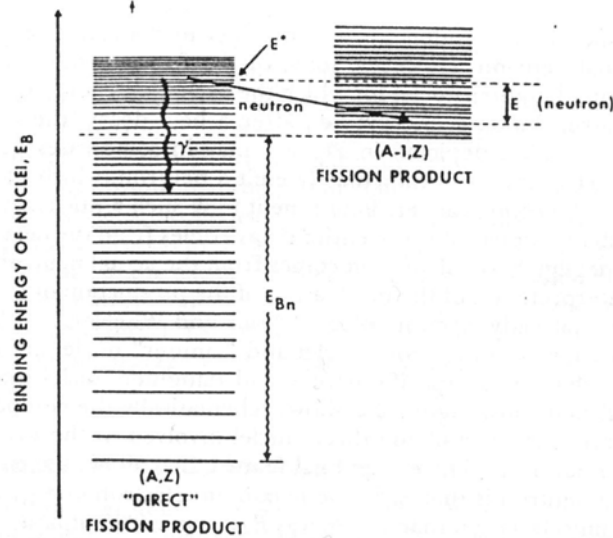


Fig. 2-1. Schematic nuclear level structure leading to prompt neutron emission.

- 일부는 β 붕괴하여 여기에너지가 중성자 결합에너지보다 크면 중성자를 방출한다.
- 실제 지연시간은 베타 붕괴 시간이라 할 수 있다.
- \therefore 실제 중성자 방출 시간은 베타 붕괴 시간에 비해 매우 작기 때문에

* Fig 2-2 : 지발중성자 방출 과정

- $E_{\beta}^{\max} > E_{Bn}$
- 모든 "parent nuclei"가 지발중성자를 방출하는 것은 아니다.
- "precursors" are defined as only that fraction of the parent nuclei that yields delayed neutrons.

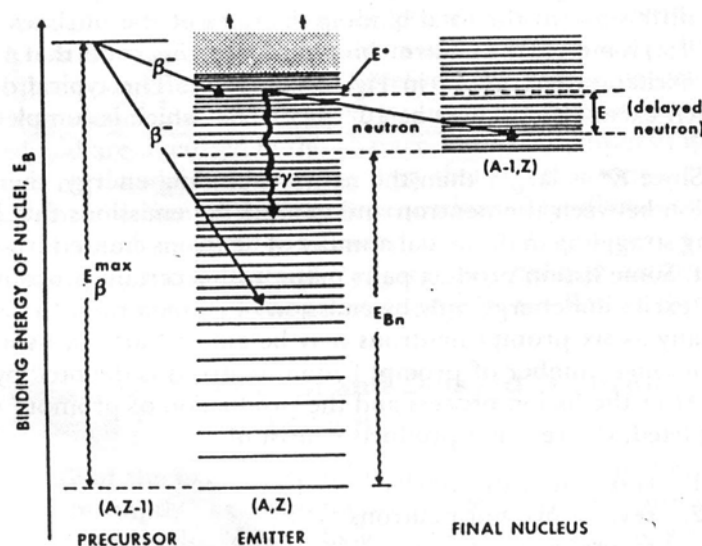


그림 2-2. Schematic nuclear level structure leading to the emission of delayed neutrons.

- precursor nucleus가 emitter nucleus로 붕괴한 후 지발중성자가 생성되는 과정은 즉발중성자가 생성되는 과정과 물리적으로 동일하다.
- 지발중성자 에너지는 즉발중성자 에너지보다 매우 작다.

2-2 Total Delayed Neutron Yields

* 평균 총 중성자 수: $\nu = \nu_p + \nu_d$ (2.2)

* 예전 문헌에서는 지발중성자를 "fraction"으로 나타내었다:

$$\beta^{bh} = \frac{\nu_d}{\nu} \quad (2.3)$$

$$\nu_d = \nu\beta^{bh} \quad (2.4)$$

* 식 (2.2)가 더 좋은 이유

1. ν_d 가 보다 기본적인 양이며, 보다 기본적인 양을 사용하는 것을 일반적으로 선호한다.
2. 새로운 측정 결과와 이론적 논의를 통하여, 지발중성자가 생성되는 범위에서($E \leq 4$ MeV) ν_d 는 핵분열을 일으키는 중성자의 에너지에는 무관함을 알 수 있다. 즉,

$$\nu_{d(E)} = \nu_d \approx \text{constant for } 0 \leq E \leq 4 \text{ MeV.}$$

- prompt yield ν_p (결과적으로 ν 역시 마찬가지임)는 동 구간에서 에너지에 강하게 종속되므로 식 (2.3)을 사용하면 지발중성자를 다룰 때 에너지 의존성이 들어갈 수밖에 없다.

* Fig. 2-3

- 4 MeV 위에서 생성되는 지발중성자 비율이 매우 낮기 때문에, ν_d 는 neutronics

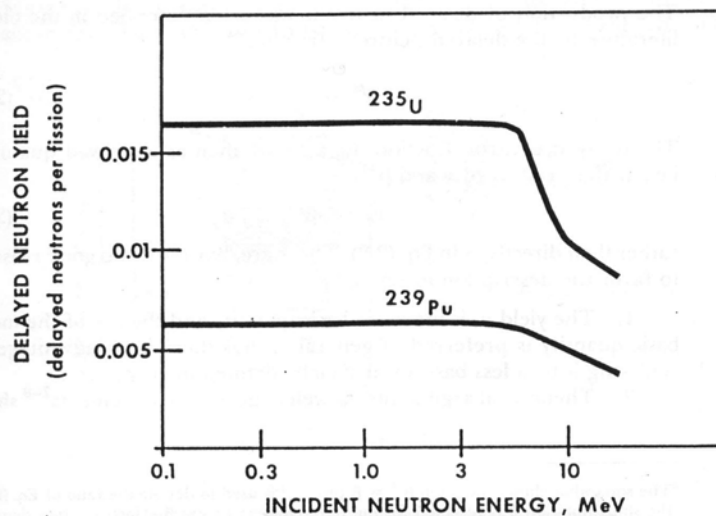


Fig. 2-3 Energy dependence of the delayed neutron yields of ^{235}U and ^{239}Pu (Ref. 7).

calculations의 전 범위에서 입사 중성자 에너지에 무관하다고 가정한다.

* 총 지발중성자 yields, ν_{di} 와 동위원소들과의 관계(regularities) \Rightarrow Table 2-1 참고.

1. atomic weight $\uparrow \Rightarrow$ 총 지발중성자 yield \uparrow
2. 양성자 수 $\uparrow \Rightarrow$ 총 지발중성자 yield \downarrow

2-3 Yields of Delayed Neutron Groups

* 500 여 핵분열생성핵종들 중 40 여 가지가 지발중성자 emitter가 될 수 있다. \Rightarrow 모두 lifetimes가 다르기 때문에 다른 중성자속에 대한 시간 의존성에 서로 다른 영향을 줄 것이다. \Rightarrow 이를 다루기 위한 방법이 필요하다.

* 이들 전부를 개별적으로 고려하는 방법: 3 가지 심각한 단점이 존재한다.

1. 많은 선행핵들의 lifetimes와 abundancies를 정확히 알지 못한다.
 2. 설사 모든 lifetimes와 abundancies를 안다고 하더라도, 이들을 kinetics problems에 포함시킨다면 비현실적으로 너무 긴 미분방정식이 되고 말 것이다.
 3. 일부 선행핵들은 자신들이 이미 베타붕괴 생성물이며, 이로 인해 이들을 모두 고려했을 때 발생하는 복잡성이 실제로 중요한지가 밝혀지지 않았다.
- \Rightarrow 간략히 만들 필요가 있다.

* average source curves, $S_d(t)$

- 중성자 생성에 관한 실험 지식은 이러한 형식으로 얻을 수 있다.
- fissionable material sample에 매우 짧은 중성자 펄스를 노출시켜서 얻는다.
 - \rightarrow 순간적으로 매우 많은 선행핵들이 생성됨. \Rightarrow (붕괴) \Rightarrow 지발중성자 source.
- # $n_d n_f =$ 전체 선행핵 수 (n_f : 핵분열 횟수)
- $S_d(t)$: 이러한 선행핵들의 붕괴율 \Rightarrow 지발중성자들의 생성율
- Fig. 2-4: 이러한 source curve의 전형적인 한 예.(Ref. 14의 자료 사용)
 - # 측정된 80개의 붕괴곡선들의 평균값을 나타낸 것이다.
 - # 모든 선행핵들의 기여도를 중첩한 것이다.

$$\# S_d(t) = n_f \sum_{k=1}^6 \nu_{dk} \lambda_k \exp(-\lambda_k t) \quad (2.5)$$

\Rightarrow delayed neutron source

6 group으로 할 때 통계적으로 가장 안정적인 결과를 보여줌.

$$\# S_{di}(t) = n_{ji} \sum_{k=1}^6 \nu_{dki} \lambda_{ki} \exp(-\lambda_{ki} t) \quad (2.6)$$

\Rightarrow 식 (2.5)의 우변에 최소자승법을 사용하여 각 동위원소 i 에 대하여 ν_{dki} 와 λ_{ki} 를 구하고, 좌변은 실험을 통하여 결정한다.

\Rightarrow 이러한 6 delay group 구조를 reactor kinetics에서 일반적으로 사용한다.

* thermal reactor에서는 ^{235}U 가 주요 연료이기 때문에 실제로 모든 지발중성자들은 ^{235}U

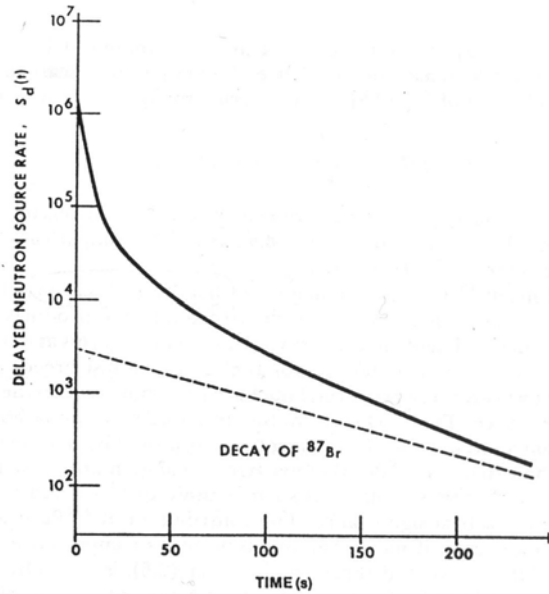


Fig. 2-4. Delayed neutron source following a fission pulse (based on data from Ref. 14).

의 핵분열생성물로부터 생성된다. $\Rightarrow S_d(t)$ 는 식 (2.6)처럼 6개의 항으로 나타난다.

- * high-burnup light water reactor와 fast breeder reactor(FBR)에서는 delayed neutron source에 기여하는 핵종이 여러 개이다. \Rightarrow 하나 이상의 동위원소가 중요하게 된다면 식 (2.5)의 단순함이 없어진다. \Rightarrow 모든 동위원소 기여도의 합으로 나타난다.

- 단일 중성자 펄스의 경우,

$$S_d(t) = \sum_i n_{fi} \sum_k \nu_{dki} \lambda_{ki} \exp(-\lambda_{ki} t) . \quad (2.7)$$

- * 붕괴상수는 동위원소에 거의 종속되지 않으며 통계 오차 내에서 움직인다.

- Table 2-II 참고

\rightarrow a single set of isotope-independent decay constants, λ_k 를 사용할 수 있다.

$$\# S_{di}(t) = n_{fi} \sum_k \nu_{dki} \lambda_k \exp(-\lambda_k t) . \quad (2.8)$$

Table 2-III은 이러한 single set을 사용한 것이다.(본 교재에서 계산시 사용된다.)

single set 사용의 이점:

1. the precursor concentrations과 the delayed neutron sources를 모든 동위원소들에 대하여 더함으로써 얻을 수 있다.
2. 즉발중성자의 경우처럼(Sec. 3-2A 참고) macroscopic cross sections을 도입할 수 있다.

- * 붕괴상수의 동위원소 의존성을 제거하는 또 다른 방법

- 지발중성자 생성에 크게 기여하는, 오랫동안 살아남는 선행핵들은 모두 알려져 있다 (delay groups 1 ~ 3). \rightarrow delay group yields를 적절한 lifetime bracket 내에서 개별적인

선행핵들로 이루어진다고 정의할 수 있다.

2-4 Emission Spectra of Delayed Neutrons

* 지발중성자의 spectrum은 즉발중성자의 것보다 부드럽다(soft).

- 훨씬 작은 에너지를 가지고 있음.

* delay groups는 다른 에너지 범위를 갖는 다른 선행핵들로 이루어졌기 때문에 방출 스펙트럼은 delay group에 의존한다.

- denoted by $\chi_{dk}(E)$

* energy-dependent delayed neutron source

- from a fission pulse for a single isotope

- 지발중성자 방출의 에너지 의존성을 식 (2.5)에 집어넣으면,

$$S_d(E, t) = n_f \sum_k \chi_{dk}(E) \nu_{dk} \lambda_k \exp(-\lambda_k t) \quad (2.9)$$

1. the "initial" emission spectrum:

$$S_d(E, 0) \propto \sum_k \chi_{dk}(E) \nu_{dk} \lambda_k \quad (2.10)$$

2. the stationary emission spectrum

- 식 (2.9)를 시간에 대하여 적분하면

$$S_d^{stat}(E) \propto \sum_k \chi_{dk}(E) \nu_{dk} \quad (2.11)$$

3. the asymptotic emission spectrum

- 가장 오래 살아남는 그룹이 지배적인 기여를 할 때

$$S_d^{as}(E) \propto \chi_{dk}(E) \text{ with } k = 1. \quad (2.12)$$

⇒ the total delayed neutron emission spectrum이 시간에 따라 매우 심하게 변할 수 있다.

⇒ the static spectrum은 시간 의존 스펙트럼과 매우 달라질 수 있다.

* 지발중성자 그룹의 방출 스펙트럼에 대한 실험

- Batchelor and McK. Hyder

^{235}U 의 1~4 delay groups에 대하여

열중성자에 의한 핵분열

- Fieg

^{238}U , ^{239}Pu , ^{235}U

14-MeV 중성자에 의한 핵분열

* Table 2-IV: 동위원소와 초기 중성자 에너지 의존성은 상대적으로 작다.

- 각 delay group에 대한 평균에너지들이 세 가지 동위원소들에 대하여 거의 동일하다.

- thermal fission과 14 MeV fission에 대하여 거의 동일하다.

- This independence is no surprising.

- # delay group 1은 모든 경우에 precursor가 ^{87}Br 이다.
- # 다른 그룹들은 몇 가지 precursors의 기여도로 이루어짐. → emission spectra와 평균 에너지의 변화는 다른 precursor isotopes의 상대적인 함유량의 작은 변화 때문이다.
- # 또한 precursor groups의 lifetime 감소에 따른 평균에너지의 변화는 매우 작다.
 - ⇒ delay group 4의 emission spectrum을 delay groups 5와 5에 대하여 사용하는 것이 합당하다.
- 실험 하한값인 $\sim 100 \text{ keV}$ 아래에 대해서도 emission spectra를 확장시켜야 하며, Table 2-V에 그러한 χ_d 값을 제시하고 있다.

Three

PRELIMINARY FORMULATION OF THE Point Kinetics Equations

- * Time-dependent neutron flux에 대한 Diffusion theory balance equation
 - Space & energy에 대한 함수 (※ exact neutron balance equation : angle에도 의존)
- * 대부분 space 의존적인 precursor equation을 포함한 복잡한 equation set을 해결할 필요가 없다.
- * Equation set → "Point kinetics equations" (시간에만 의존)
 - space와 energy에 대한 형식적인 비의존성을 표시하기 위해 널리 사용되는 용어
 - 각 변수에 대한 적분을 통해 얻어짐
- * 이 장에서는 preliminary formulation을 유도, exact treatment는 5장에서 제시

3-1 Intuitive Point Kinetics - The Basic Concepts

3-1A The prompt Neutron Balance Equation

- * 가정 : No independent source, Off-critical reactor, 모든 지발중성자가 즉시 방출
- * The meaning of off-criticality : *The production of neutrons ≠ The loss of neutrons*
- * (즉발중성자의 production and loss) \propto (현존하는 중성자의 개수)
 - (production과 loss의 차이) \propto (원자로 내 중성자의 개수, $n(t)$)
- * *Off-balance*

$$\dot{n}(t) = -\frac{dn(t)}{dt} \propto n(t) \quad \dots\dots (3.1) \quad \text{or} \quad \dot{n}(t) = \alpha n(t) \quad \dots\dots (3.2)$$

where α = inverse period

- α 가 상수인 경우 (3.2)식의 해 → $\dot{n}(t) = n_0 \exp(\alpha t) \quad \dots\dots (3.3)$
- Neutron population : α 의 부호에 따라 exponentially increase or decrease
 - ※ Stationary flux : $\alpha = 0$ 인 경우

- * α : 중성자 production & loss의 off-balance에 따라 결정 \rightarrow Reaction rate의 차이로 표현
- DB^2 term으로 누설되고 모든 중성자가 단순한 1군 theory에 의해 다루어지는 single homogeneous composition으로 구성된 원자로의 경우의 off-balance equation

$$\frac{dn(t)}{dt} = \nu\Sigma_f\phi(t) - (\Sigma_a + DB^2)\phi(t) \quad \dots\dots (3.4)$$

- ϕ (neutrons cm/s) : $\phi(r, t)$ 를 homogeneous reactor composition 전체에 대한 공간 적분

\rightarrow (3.4)식의 모든 항의 dimension : [neutrons / sec]

- 1군 model에서 total integrated flux & 중성자의 개수 : 평균속도 \bar{v} 에 관한 함수

$$\rightarrow \phi = \bar{v}n \quad \dots\dots (3.5)$$

- (3.5) \rightarrow (3.4) : $\frac{1}{\bar{v}} \frac{d\phi}{dt} = (\nu\Sigma_f - \Sigma_a - DB^2)\phi \quad \dots\dots (3.6)$

- (3.6)식을 $\nu\Sigma_f$ 로 나누고, 증배계수 $k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad \dots (3.7)$ 와

반응도 $\rho = \frac{k-1}{k} \quad \dots (3.8)$ 개념을 도입하여 (3.6)식 정리 \rightarrow

$$\frac{1}{\bar{v}\nu\Sigma_f} \frac{d\phi}{dt} = \rho\phi \quad \dots\dots (3.9)$$

3-1B Average Neutron Generation Time and Lifetime

- * "Average neutron generation time (Λ)" : (3.9)식 좌변의 계수

$$\rightarrow \Lambda = \frac{1}{\bar{v}\nu\Sigma_f} \quad \dots\dots (3.10)$$

- * Λ : 연속적인 중성자 생성과정에서 두 개의 birth events 사이의 평균적인 시간을 의미 \rightarrow "generation time"이라는 용어를 사용

- * $\frac{1}{\Sigma_f}$ = "핵분열에 대한 mean free path"

= 하나의 중성자가 생성되어 핵분열을 일으키기까지의 평균 이동거리

$$* \frac{1}{v} \left[\frac{-s}{cm} \right] \cdot \frac{1}{\Sigma_f} [cm] = \Delta t_f [s] \quad \dots\dots (3.11)$$

➔ 중성자의 생성에서 핵분열 발생까지 평균적으로 소요된 시간

* 핵분열 반응당 ν 개의 중성자가 생성되므로, 중성자의 생성과 다음 세대에서 하나의 중성자가 생성되기까지 평균적으로 걸리는 시간은 (3.11)식을 ν 로 나눔으로써 구할 수 있다.

$$\Rightarrow \frac{1}{\nu} \Delta t_f = \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Sigma_f} = \Lambda \quad \dots\dots (3.12)$$

$$* \text{"Average neutron lifetime"} : l = \frac{1}{v} \frac{1}{\Sigma_a + DB^2} \quad \dots\dots (3.13)$$

- 중성자의 생성으로부터 흡수 / 누설되기까지의 평균 이동거리 = $\frac{1}{\Sigma_a + DB^2}$

- 위의 식을 \bar{v} 로 나누면 (3.13)식을 얻을 수 있다.

- 누설이 없는 Infinite system에서 lifetime : $B^2 = 0 \Rightarrow$

$$l_\infty = \frac{1}{v} \frac{1}{\Sigma_a} \quad \dots\dots (3.14)$$

* Fig. 3-1

* 유한매질에서의 lifetime (l) 과 무한매질에서의 lifetime (l_∞)의 관계

- 단순한 1군 모델에서 k 와 k_∞ 간의 관계와 동일

$$- k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B^2} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2} \quad \dots\dots (3.15a)$$

$$- l = \frac{l_\infty}{1 + L^2 B^2} \quad \dots\dots (3.15b) \quad \text{where } L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} : \text{one-group diffusion length}$$

* Lifetime과 generation time의 관계

- One-group generation time : system의 크기와 직접적 관련은 없음

- One-group lifetime : DB^2 term이 포함되어 있음

- 그러나, 서로 직접적으로 비례(즉발중성자에만 적용) : $l = k \cdot \Lambda \quad \dots\dots (3.16)$

◦ subcritical : $l < \Lambda$: 중성자의 population 감소

◦ critical : $l = \Lambda$

◦ supercritical : $l > \Lambda$: 중성자의 population 증가

* generation time 또는 lifetime을 즉발중성자 kinetics equation (3.9)식에 대입

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda} \phi \quad \dots\dots (3.17) \quad \text{or} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{-\Delta k}{l} \phi \quad \dots\dots (3.18)$$

- 두 equation은 동일한 뜻
- 고전문헌 : neutron의 개수에 기초를 둔 kinetics equation이 사용됨
- 현대문헌 : (3.17)식의 flux, reactivity, generation time과 같은 용어를 선호

* Neutron flux

- Statics, static off-criticality 문제와 핵연료주기와 같은 원자로물리의 모든 분야에 사용
- 따라서, dynamics의 경우에도 flux를 사용하는 것이 일관적이며 편리함.

* Dynamics에서의 반응도 : initiating & feedback의 복합적 영향으로 구성되기 때문에 중요

- Δk 대신 ρ 사용 \rightarrow lifetime보다 generation time 사용을 선호

* Λ & l : 종종 즉발중성자 generation or lifetime이라 부름

- 이유 : precursor decay와 지발중성자 생성에서의 지연이 개념적으로 무시
- 그러나, Λ 가 단지 시간에 대한 derivative term 앞에 factor의 abbreviation으로 도입되므로 결과에 영향을 미치지 않는다.
- generation time으로서의 의미는 단지 이러한 요소에 대한 설명
 - 어떠한 일관적 방법에 의한 계산에서 사용되지 않음

* 특정한 에너지의 즉발 & 지발중성자는 원자로 내에서 동일한 lifetime을 가짐

- 중성자 lifetime 앞에 "prompt"라는 용어를 사용하는 것은 잘못된 결과를 야기
- generation time의 경우에도 동일
- 따라서, 이 문헌에서는 사용하지 않음

3-1C The Effect of Delayed Neutron - The intuitive Point Kinetics Equations

* 즉발중성자의 생성만이 핵분열 과정과 직접 관련(지발중성자 : precursor의 β 붕괴 이후 생성)

* 이러한 차이를 포함시킨 equation

$$\frac{1}{v} \frac{d\phi}{dt} = (\nu_p \Sigma_f - \Sigma_a - DB^2) \phi + \sum_k \lambda_k C_k \quad \dots\dots (3.19)$$

- (3.6)식 우변의 첫째 항인 total $\nu \rightarrow$ 즉발중성자 생성비율인 ν_p 로 대체
- 지발중성자는 precursor의 β 붕괴율 형태로 추가
- (3.19)식에서 지발중성자 precursor의 공간적 분포 : 원자로 전체에 대해 적분

- 다른 항과 마찬가지로 방법으로 C_k 를 나타낸다.

* 반응도 개념을 도입한 표현

- (3.19)식의 우변 괄호 안에 $\nu_d \Sigma_f$ 를 가감한 후 $\nu \Sigma_f$ 로 나눔

$$\frac{1}{\nu \Sigma_f} \frac{d\phi}{dt} = \left[\frac{\nu \Sigma_f - (\Sigma_a + DB^2)}{\nu \Sigma_f} - \frac{\nu_a \Sigma_f}{\nu \Sigma_f} \right] \phi + \frac{1}{\nu \Sigma_f} \sum_k \lambda_k C_k$$

$$\rightarrow \Lambda \frac{d\phi}{dt} = (\rho - \beta) \phi + \frac{1}{\nu \Sigma_f} \sum_k \lambda_k C_k \quad \dots\dots (3.20)$$

$$\text{where } \rho : \text{1군 근사, } \beta = \frac{\nu_a \Sigma_f}{\nu \Sigma_f} = \frac{\sum_i (\nu_d \Sigma_f)_i}{\sum_i (\nu \Sigma_f)_i} \quad \dots\dots(3.21)$$

* Effective delayed neutron fraction : $\beta_{eff} = \beta$

- 6개의 delay group의 contribution 으로 표현할 수 있다.

$$\beta = \sum_{k=1}^6 \beta_k \quad \dots\dots(3.22a) \quad \beta_k = \frac{\nu_{dk} \Sigma_f}{\nu \Sigma_f} \quad \dots\dots(3.22b)$$

- level of sophistication에서 지발중성자와 전체 생성중성자의 비율로 구성

* The typical form of the kinetics equation : (3.20)식을 Λ 로 나눔

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \phi + \frac{1}{\Lambda \nu \Sigma_f} \sum_k \lambda_k C_k \quad \dots\dots (3.23)$$

* (3.23)식은 precursor의 생성 / 붕괴간의 balance를 표현함으로써 완성됨

$$\frac{dC_k}{dt} = -\lambda_k C_k + \nu_{dk} \Sigma_f \phi \quad k = 1, \dots, 6 \quad \dots\dots (3.24)$$

※ 우변 1번째 항 : precursor의 붕괴, 우변 2번째 항 : precursor의 생성

- ν_{dk}

◦ (3.22b)식 : the group yield of delayed neutrons

◦ (3.24)식 : the group yield of precursors

◦ 두 개의 yields : precursor의 정의 때문에 수치적으로 동일

* The intuitive point kinetics equations

- (3.23) & (3.24)식 : 7개의 미지함수($\phi(t)$, $C_1(t) \sim C_6(t)$)에 대한 7개의 미분방정식

$$- \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\rho - \beta}{\Lambda} \phi + \frac{1}{\Lambda \nu \Sigma_f} \sum_k \lambda_k C_k \quad \dots (3.25a)$$

$$- \frac{dC_k}{dt} = -\lambda_k C_k + \nu_{dk} \Sigma_f \phi \quad \dots (3.25b) \quad : \text{precursor balance equation}$$

$$* S_{pk} = \nu_{dk} \Sigma_f \phi \quad \dots (3.26) \quad : \text{precursor source}$$

$$- \text{고전문헌에서 } S_{pk} = \beta_k \nu \Sigma_f \bar{v} n \quad \dots (3.27a)$$

$$- (3.12) \text{식을 사용하면 } S_{pk} = \frac{\beta_k}{\Lambda} n \quad \dots (3.27b)$$

- (3.27b)에서 S_{pk} 가 Λ 에 반비례한다는 것을 알 수 있음

- 하지만, direct formulation인 (3.26)에서는 알 수가 없음

Three

PRELIMINARY FORMULATION OF THE Point Kinetics Equations

3-2A The Diffusion approximation as the Basis of Reactor Kinetics

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(r, E, t)}{\partial t} = (F_P - M)\phi(r, E, t) + S_d(r, E, t) + S(r, E, t)$$

①
②
③
④
⑤

① : flux는 위치와 에너지, 시간에 dependent하다.

$$\Phi = \phi(r, E, t)$$

: 중성자속도(v)는 에너지(E)의 제곱근에 비례한다.

: 단위 cm³·s·dE당 중성자수의 변화

② : 즉발중성자에 의한 생성율

$$F_p \Phi = \sum \chi_{pi}(E) \int_E \nu_{pi}(E') \Sigma_{fi}(r, E', t) \phi(r, E', t) dE'$$

☞ 방출스펙트럼(χ_{pi})의 동위원소에 대한 dependent는 대부분의 경우 무시한다.

☞ macroscopic cross section은 다음과 같다.

$$\nu_p \Sigma_f(r, E, t) = \sum_i \nu_{pi}(E) \Sigma_{fi}(r, E, t)$$

따라서,
$$F_p \Phi = \chi_p(E) \int_0^\infty \nu_p \Sigma_f(r, E', t) \phi(r, E', t) dE'$$

③ : 중성자 손실

$$M\Phi = -\nabla \cdot D(r, E, t) \nabla \phi(r, E, t) + \Sigma_t(r, E, t) \phi(r, E, t) - \int_E \Sigma_s(r, E' \rightarrow E, t) \phi(r, E', t) dE'$$

leakage

absorption

scattering

④ : 지발중성자 생성율

$$S_d(r, E, t) = \sum_k \lambda_k C_k(r, t) \chi_{dk}(E)$$

3-2B Derivation of the One-Group Point Kinetics Equations

1) 단순화

1. flux $\phi(r, E, t)$ 의 time dependent는 공간과 에너지에 대하여 분리가 가능

$$\phi(r, E, t) = p(t)\psi(r, E)$$
2. leakage loss는

$$D(r, E)B^2(r, E)\phi(r, E, t)$$

where $B^2(r, E)$ is to be calculated from the initial flux distribution.
3. $\Sigma_f(r, E)$ 항은 시간에 독립적이다.

위의 단순화를 diffusion equation에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\phi(r, E)}{v(E)} dE \frac{dp}{dt} \\ = & \left\{ \int_0^\infty \nu_p \Sigma_f(r, E) \psi(r, E) dE - \int_0^\infty [\Sigma_a(r, E, t) + D(r, E)B^2(r, E)] \psi(r, E) dE \right\} p(t) \\ & + \sum_k \lambda_k C_k(r, t) + \int_0^\infty S(r, E, t) dE \end{aligned}$$

☞ 모든 normalized emission spectra $\chi_p(E)$ 와 $\chi_{dk}(E)$ 는 에너지에 대한 적분을 통해서 사라진다.

☞ 산란에 대한 항 $\Sigma_s \phi$ (즉, $\Sigma_s \psi$)는 적분을 통해서 사라진다.

2) one-group equation

공간에 대해서 적분, 그리고 integrated shape function $\widehat{\psi}$ 로 나눈다면

☞ integrated shape function $\widehat{\psi} = \int_V \int_0^\infty \phi(r, E) dE dV$

다음 one-group equation이 얻어진다.

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} \frac{dp}{dt} = [\nu_p \Sigma_f - \Sigma_a - DB^2] p + \frac{1}{\widehat{\psi}} \sum_k \lambda_k \widehat{C}_k +$$

☞ $\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{1}{\widehat{\psi}} \int_V \int_0^\infty \frac{\phi(r, E)}{v(E)} dE dV$

☞ $\nu_p \Sigma_f = \frac{1}{\widehat{\psi}} \int_V \int_0^\infty \nu_p \Sigma_f(r, E) \phi(r, E) dE dV$

$$\Rightarrow \widehat{\Sigma}_a(t) = \frac{1}{\widehat{\phi}} \int_V \int_0^\infty \Sigma_a(r, E, t) \phi(r, E) dE dV$$

$$\Rightarrow \widehat{DB}^2 = \frac{1}{\widehat{\phi}} \int_V \int_0^\infty D(r, E) B^2(r, E) \phi(r, E) dE dV$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_k(t) = \int_V C_k(r, t) dV$$

$$\Rightarrow \widehat{S}(t) = \int_V \int_0^\infty S(r, E, t) dE dV$$

$\nu\Sigma_f$ 로 나누고 β 를 새로이 도입하면

$$\Lambda \frac{dp}{dt} = (\rho - \beta)p + \frac{1}{\widehat{S}_0} \sum_k \lambda_k \widehat{C}_k + \frac{\widehat{S}}{\widehat{S}_0}$$

$$\Rightarrow \widehat{S}_0 = \nu\Sigma_f \widehat{\phi}_0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{1}{\nu\Sigma_f} \left(\frac{1}{v} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_k \zeta_k(t) = \lambda_k \frac{\widehat{C}_k(t)}{\widehat{S}_0} \quad (\zeta_k(t) : \text{지발중성자 그룹 } k \text{의 "reduced precursors"})$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{\widehat{S}(t)}{\widehat{S}_0}$$

3) precursor balance equation

공간에 대해서 적분하고, \widehat{S}_0 로 나누면

$$-\frac{d\zeta_k(t)}{dt} = -\lambda_k \zeta_k(t) + \beta_k t(t)$$

$$\Rightarrow \beta_k = \frac{\int_V \int_0^\infty \nu_{dk} \Sigma_f(r, E) \phi(r, E) dE dV}{\int_V \int_0^\infty \nu \Sigma_f(r, E) \phi(r, E) dE dV}$$

◆ Approximate point kinetic equations ;

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \zeta_k + \frac{1}{\Lambda} s(t) \\ -\frac{d\zeta_k}{dt} = -\lambda_k \zeta_k + \beta_k t(t) \end{cases}$$

일반적으로 source 항 앞의 $\frac{1}{\Lambda}$ factor는 이러한 양들과 결합된다.

$$c_k(t) = \frac{1}{\Lambda} \zeta_k(t), \quad s_c(t) = \frac{1}{\Lambda} s(t)$$

이에 따라 일점운동방정식은

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} p + \sum_k \lambda_k c_k + s_c$$

$$\frac{dc_k}{dt} = -\lambda_k c_k + \frac{\beta_k}{\Lambda} p$$

이 형태가 이 책에서는 더 자주 사용된다.

Four

STATIC PERTURBATION THEORY

4-1 The Basic Reactor Eigenvalue Problem and the Perturbation Theory App.

4-1A Motivations for a Perturbation Theory

- * Correct treatment of complicated configuration (three-dimensional configurations with spatially varying heterogeneous material composition)
→ tedious & expensive
- * So we need proper approximations with sufficient accuracy
- * The complications that have been eliminated in these approximate solutions can then be treated as "perturbations" of simplified cases.
- * The application of perturbation theory is very advantageous for the calculation of the perturbation of multiplication constants $k (= k_{eff})$ for complicated configurations.
- * Especially when the calculation of the corresponding perturbed neutron flux is not required. → Static perturbation theory frequently and commonly applied.

4-1B Neutron Multiplication as an Eigenvalue Problems

- * the concept of the multiplication constant, $k \rightarrow$ an eigenvalue in a static neutron balance eq.

$$M\Phi = \lambda F\Phi \quad (4.1)$$

[(migration & loss of neutrons)=(modified source of fission neutrons)]

multiplication constant, k defined (by eigenvalue λ)

$$k = \frac{1}{\lambda} \quad (4.2)$$

- * For a simple one-group model,

$$\text{Migration and loss operator, } \mathbf{M} = D\mathbf{B}^2 + \Sigma_a \quad (4.5a)$$

$$\text{Fission source operator, } \mathbf{F} = \nu\Sigma_f \quad (4.5b)$$

$$\rightarrow (D\mathbf{B}^2 + \Sigma_a)\hat{\Phi} = \lambda\nu\Sigma_f\hat{\Phi} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\lambda} = k = \frac{\nu\Sigma_f}{D\mathbf{B}^2 + \Sigma_a} (=1, \text{ specially critical}) \quad (4.7)$$

- * If the reactor is not critical ($\nu\Sigma_f - (D\mathbf{B}^2 + \Sigma_a) \neq 0$), the flux must be either time dependent or equal to zero

- * **Reactivity (static reactivity), ρ** ; the degree of off-criticality

$$1 - \lambda = 1 - \frac{1}{k} = \frac{\Delta k}{k} = \rho \quad (4.11)$$

- * Solution of the eigenvalue problem, Eq.(4.6) can be found by solving a simple algebraic equation (matrix form, application of direct inversion or iterative method)

4-1C The Basic Approach for the Calculation of an Eigenvalue Perturbation

- * Perturbed & Unperturbed system

- 1) perturbed system : more complicated actual system

$$\mathbf{M}\Phi = \lambda\mathbf{F}\Phi \quad (4.1)$$

- 2) unperturbed system : clean system

$$\mathbf{M}_o\Phi_o = \lambda_o\mathbf{F}_o\Phi_o \quad (4.12)$$

- * Expression of perturbed quantities

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = -\frac{\Delta k}{k_o k} = -\Delta\rho \quad (4.13)$$

where $-\Delta\rho$ is "reactivity increment," and $\Delta k = k - k_o$ (4.14)

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_o \quad (4.15a)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_0 \quad (4.15b)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi \quad (4.18)$$

* Mathematical formulation

$$\mathbf{A}\Phi = \lambda\Phi \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{A}_0\Phi_0 = \lambda_0\Phi_0 \quad (4.17b)$$

* Introduce Φ_0 (Eq. (4.18)) into Eq. (4.17a)

$$\mathbf{A}(\Phi_0 + \Delta\Phi) = \lambda(\Phi_0 + \Delta\Phi)$$

$$\therefore \mathbf{A}\Phi_0 = \lambda\Phi_0 - (\mathbf{A}\Delta\Phi - \lambda\Delta\Phi) \quad (4.19)$$

* These equations depend on space and energy. Since the desired quantity, $\Delta\lambda$, is just a number, the space and energy dependencies are removed by integration. To preserve generality and to add flexibility to the procedure, the equations are multiplied with a *weighting function*, $\Phi^w = \phi^w(\mathbf{r}, E)$, prior to the integration.

* Multiplication of Eqs. (4.19) & (4.17b) with a weighting function, (see Sec. B-1 of App.B, "scalar product")

$$(\Phi^w, \mathbf{A}\Phi_0) = \lambda(\Phi^w, \Phi_0) - (\Phi^w, [\mathbf{A} - \lambda]\Delta\Phi) \quad (4.20a)$$

$$(\Phi^w, \mathbf{A}_0\Phi_0) = \lambda_0(\Phi^w, \Phi_0) \quad (4.20b)$$

* Subtracting Eqs (4.20a) and (4.20b),

$$(\Phi^w, \Delta\mathbf{A}\Phi_0) = \Delta\lambda(\Phi^w, \Phi_0) - (\Phi^w, [\mathbf{A} - \lambda]\Delta\Phi) \quad (4.21)$$

* The second term on the right side of Eq. (4.21),

$$(\Phi^w, [\mathbf{A} - \lambda]\Delta\Phi) = (\Phi^w, [\mathbf{A}_0 - \lambda_0]\Delta\Phi) + (\Phi^w, [\Delta\mathbf{A} - \Delta\lambda]\Delta\Phi) \quad (4.23)$$

* If the *difference of the perturbed and unperturbed systems is small*, the second-order term in Eq. (4.23) is small compared to the first-order term.

* If the first-order term can be eliminated, the right side of Eq.(4.23) *reduced to only a small second-order term*.

* If Φ^w is chosen to be the adjoint function Φ_0^w (the solution of the adjoint eigenvalue problem) \Rightarrow the first term on the right side of Eq. (4.23) can be eliminated. \rightarrow Eq.(4.23) is neglected.

* Therefore, Eq. (4.21)

$$(\Phi^w, \Delta A \Phi_0) = \Delta \lambda (\Phi^w, \Phi_0)$$

$$\therefore \Delta \lambda \cong \frac{(\Phi_0^*, \Delta A \Phi_0)}{(\Phi_0^*, \Phi_0)} = \Delta \lambda^{(1)} \quad (4.26)$$

where, $\Delta \lambda^{(1)}$ is the result of "first-order perturbation theory".

4-2 First-Order Perturbation Theory

* The application of the same approach (4-1C) to the eigenvalue problem of reactor (some additional terms)

* Derivation of First-order perturbation theory

1) The perturbed & unperturbed problem (neutron balance equation)

$$\mathbf{M}\Phi = \lambda \mathbf{F}\Phi \quad (4.27)$$

$$\mathbf{M}_o \Phi_o = \lambda_o \mathbf{F}_o \Phi_o \quad (4.28)$$

2) Decomposing the flux Φ , insert Eq.(4.18) into Eq.(4.27)

$$\mathbf{M}\Phi_o = \lambda \mathbf{F}\Phi_o - (\mathbf{M} - \lambda \mathbf{F})\Delta \Phi \quad (4.29a)$$

3) The first term on the right side Eq. (4.29a) is recast into zero-, 1st-, and 2nd -order terms :

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{F}\Phi_o &= \lambda \mathbf{F}_o \Phi_o + \lambda_o \Delta \mathbf{F}\Phi_o + \Delta \lambda \Delta \mathbf{F}\Phi_o \\ &= \lambda \mathbf{F}_o \Phi_o + \lambda_o \Delta \mathbf{F}\Phi_o \quad (\text{neglecting the 2nd-order term}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

4) Insert Eq.(4.30) into Eq.(4.29)

$$\mathbf{M}\Phi_o = \lambda \mathbf{F}_o \Phi_o + \lambda_o \Delta \mathbf{F}\Phi_o - (\mathbf{M} - \lambda \mathbf{F})\Delta \Phi \quad (4.29b)$$

5) Multiplying Eq.(4.29b) and Eq.(4.28) with a weighting function (Φ^w)

$$(\Phi^w, \mathbf{M}\Phi_o) = \lambda(\Phi^w, \mathbf{F}_o\Phi_o) + \lambda_o(\Phi^w, \Delta\mathbf{F}\Phi_o) - (\Phi^w, [\mathbf{M} - \lambda\mathbf{F}]\Delta\Phi) \quad (4.31a)$$

$$(\Phi^w, \mathbf{M}_o\Phi_o) = \lambda_o(\Phi^w, \mathbf{F}_o\Phi_o) \quad (4.31b)$$

6) Subtracting Eq.(4.31a) & Eq.(4.31b)

$$(\Phi^w, [\Delta\mathbf{M} - \lambda_o\Delta\mathbf{F}]\Phi_o) = \Delta\lambda(\Phi^w, \mathbf{F}_o\Phi_o) - (\Phi^w, [\mathbf{M} - \lambda\mathbf{F}]\Delta\Phi) \quad (4.32)$$

7) The term containing the flux deformation ($\Delta\Phi$) can be eliminated in a 1st-order approximation.

$$\begin{aligned} (\Phi^w, [\mathbf{M} - \lambda\mathbf{F}]\Delta\Phi) &= (\Phi^w, [\mathbf{M}_o - \lambda_o\mathbf{F}_o]\Delta\Phi) \\ &\quad + (\Phi^w, [\Delta\mathbf{M} - \lambda_o\Delta\mathbf{F} - \Delta\lambda\mathbf{F}_o]\Delta\Phi) \\ &\quad - \Delta\lambda(\Phi^w, \Delta\mathbf{F}\Delta\Phi) \\ &= (\Phi^w, [\mathbf{M}_o - \lambda_o\mathbf{F}_o]\Delta\Phi) \\ &\quad \text{(neglect the 2nd- and 3rd-order term)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

8) Then, choose the unperturbed adjoint flux Φ_o^* as the weighting function Φ^w

$$\begin{aligned} (\Phi^w, [\mathbf{M}_o - \lambda_o\mathbf{F}_o]\Delta\Phi) &= (\Delta\Phi, [\mathbf{M}_o^* - \lambda_o\mathbf{F}_o^*]\Phi_o^w) \\ &= (\Delta\Phi, [\mathbf{M}_o^* - \lambda_o\mathbf{F}_o^*]\Phi_o^*) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

(since the adjoint flux Φ_o^* is the solution of the adjoint eigenvalue problem)

9) Remainder of Eq.(4.32)

$$(\Phi^w, [\Delta\mathbf{M} - \lambda_o\Delta\mathbf{F}]\Phi_o) = \Delta\lambda(\Phi^w, \mathbf{F}_o\Phi_o) \quad (4.32')$$

* The First order perturbation formula for reactivity increment

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= -\frac{(\Phi_o^*, [\lambda_o \Delta F - \Delta M] \Phi_o)}{(\Phi_o^*, F_o \Phi_o)} = -\Delta\lambda \\ &= -\frac{\int_{V \cdot E} \int \Phi_o^*(\mathbf{r}, E) (\lambda_o \Delta F - \Delta M) \Phi_o(\mathbf{r}, E) dE dV}{\int_{V \cdot E} \int \Phi_o^*(\mathbf{r}, E), F_o \Phi_o(\mathbf{r}, E) dE dV} \end{aligned} \quad (4.36)$$

- * The first-order perturbation theory formulas are called "stationary" with respect to small changes in the system because the error of the first-order reactivity evolves only "quadratically" with a linearly increasing change.

Four

STATIC PERTURBATION THEORY

4-3. Exact Perturbation Theory

* The perturbation theory approach can be expanded by including higher order perturbation terms.

- The result would converge to the exact solution.
- The resulting method is cumbersome and generally not practical.

* Derivation of Exact perturbation theory

- The perturbed & unperturbed problem (modified by adjoint eqs.)

$$\mathbf{M}\Phi = \lambda\mathbf{F}\Phi \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{M}_0^*\Phi_0^* = \lambda_0\mathbf{F}_0^*\Phi_0^* \quad (4.37b)$$

- These equations are multiplied by Φ_0^* and Φ ,

$$\left(\Phi_0^*, \mathbf{M}\Phi\right) = \lambda\left(\Phi_0^*, \mathbf{F}\Phi\right) \quad (4.38a)$$

$$\left(\Phi, \mathbf{M}_0^*\Phi_0^*\right) = \lambda_0\left(\Phi, \mathbf{F}_0^*\Phi_0^*\right) \quad (4.38b)$$

- The equation in Eq.(4.38b) is revolved as,

$$\begin{aligned} \left(\Phi, \mathbf{M}_0^*\Phi_0^*\right) &= \lambda_0\left(\Phi, \mathbf{F}_0^*\Phi_0^*\right) = \lambda_0\left(\Phi_0^*, \mathbf{F}_0\Phi\right) \\ &= \lambda_0\left(\Phi_0^*, \mathbf{F}\Phi\right) - \lambda_0\left(\Phi_0^*, \Delta\mathbf{F}\Phi\right) \end{aligned} \quad (4.38d)$$

- Therefore, solving for $-\Delta\lambda = \Delta\rho$ with subtracting Eq.(4.38a) and (4.38d) yields,

$$\Delta\rho = \frac{\left(\Phi_0^*, [\lambda_0\Delta\mathbf{F} - \Delta\mathbf{M}]\Phi\right)}{\left(\Phi_0^*, \mathbf{F}\Phi\right)} = -\Delta\lambda \quad (4.39)$$

* The exact perturbation formula for reactivity increments

The first-order perturbation formula is obtained as a first approximation of the

exact formula by approximating Φ with Φ_0 and \mathbf{F} with \mathbf{F}_0 .

The errors of first-order perturbation are 2nd order.

* Exact formula for the reactivity

- If Φ_0 describes a specific critical state, $\lambda_0 = 1$.

$$\rho = \rho^{st} = \frac{(\Phi_0^*, [\Delta \mathbf{F} - \Delta \mathbf{M}] \Phi)}{(\Phi_0^*, \mathbf{F} \Phi)} \quad (4.40)$$

- The reactivity(ρ) of a state with flux Φ is independent of the specifics of the critical reference state. \rightarrow the \mathbf{F}_0 and \mathbf{M}_0 terms in Eq. (4.40) cancel.

$$(\Phi_0^*, [\mathbf{F}_0 - \mathbf{M}_0] \Phi) = 0 \quad (4.41)$$

- The weighting function need not be the adjoint of any critical problem.

$$\rho^{st} = \frac{(\Phi^w, [\mathbf{F} - \mathbf{M}] \Phi)}{(\Phi^w, \mathbf{F} \Phi)} \quad (4.42)$$

- If the state is near a known critical state with the adjoint flux Φ_0^* , it can be numerically advantageous to choose this adjoint flux as a weighting function.

$$\rho = \rho^{st} = \frac{(\Phi_0^*, [\mathbf{F} - \mathbf{M}] \Phi)}{(\Phi_0^*, \mathbf{F} \Phi)} \quad (4.43)$$

- * Application of the exact perturbation formula provide a tool to improve the accuracy of the reactivity.
 - It indicates how to improve practically on the first-order theory results without going to the formal but impractical route of higher order perturbation theories.

4-4 Application of First-order Perturbation Theory

- * To illustrate the application of the 1st-order perturbation formula
- * To demonstrate the effect of the adjoint flux weighting
(Applications of 1st-order and exact perturbation theories \rightarrow Chap. 9 & 11)

- * Simple one-group model

- The neutronics eigenvalue problem is self-adjoint $\rightarrow \Phi^* = \Phi$
- The flux is just a single number $\rightarrow \Phi_0, \Phi_0^*$ cancel.
- The formula for the reactivity increment :

$$\Delta \rho^{(1)} = \frac{\lambda_0 \Delta \nu \Sigma_f - \Delta \Sigma_a'}{\nu \Sigma_{f0}} = \frac{\Sigma_{a0}' \Delta \nu \Sigma_f}{(\nu \Sigma_{f0})^2} - \frac{\Delta \Sigma_a'}{\nu \Sigma_{f0}} \quad (4.45)$$

$$\text{, where } \Sigma_{a0}' = D_0 B_0^2 + \Sigma_{a0} \quad (4.46)$$

- Reference value of ρ

$$\rho_0 = 1 - \frac{1}{k_0} = \frac{\nu\Sigma_{f0} - \Sigma'_{a0}}{\nu\Sigma_{f0}} \quad (4.47)$$

The first order variation of Eq.(4.47) is,

$$\delta\rho^{(1)} = \delta\left(1 - \frac{\Sigma'_{a0}}{\nu\Sigma_{f0}}\right) = \frac{\Sigma'_{a0}\delta\nu\Sigma_f}{(\nu\Sigma_{f0})^2} - \frac{\delta\Sigma'_{a0}}{\nu\Sigma_{f0}} \quad (4.48)$$

* This agrees with Eq.(4.45b)

→Exact reactivity increment can be calculated,

→No need to apply a first-order approximation

* Space-dependent perturbation due to a local increase in absorption (e.g. CR insertion)

- 1-D, slab reactor (x-direction) model

- Unperturbed criticality eigenvalue problem for a spatially uniform composition

$$\left(-D_0 \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_{a0}\right)\phi_0(x) = \lambda_0 \nu\Sigma_{f0}\phi_0(x) \quad (4.49)$$

$$\text{,with } \phi_0(x_b) = 0 \text{ at } x_b = \pm a \quad (4.50)$$

- Space-dependent flux as determined by the boundary conditions.

$$\phi_0(x) = \phi_0 \cos Bx \quad (4.51)$$

$$\text{,where } B^2 = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \text{ (geometrical buckling)} \quad (4.52)$$

- Insert Eq.(4.51) into Eq.(4.49)

$$\frac{1}{\lambda_0} = k_0 = \frac{\nu\Sigma_f}{D_0 B^2 + \Sigma_{a0}} = \frac{\nu\Sigma_{f0}}{\Sigma'_{a0}} \quad (4.53)$$

- If the change consists only of a change in Σ_a (e.g. $\Delta\nu\Sigma_f = 0$) in a range from $-x_p$ to $+x_p$, the perturbation reactivity in the one-group approximation

($\phi_0^*(x) = \phi_0(x)$) is given,

$$\Delta\rho^{(1)} = \frac{-\int_{-x_p}^{x_p} \phi_0(x) \Delta\Sigma_a \phi_0(x) dx}{\int_{-a}^a \phi_0(x) \nu\Sigma_{f0} \phi_0(x) dx} \quad (4.55)$$

The integral in the denominator is,

$$\phi_0^2 \nu\Sigma_{f0} \int_{-a}^a \cos^2 Bx dx = \nu\Sigma_{f0} \cdot a\phi_0^2 \quad (4.56)$$

If x_p is small, the cosine in the numerator integral can be unity. Then the numerator of Eq.(4.55) becomes :

$$-\phi_0^2 \int_{-x_p}^{x_p} \Delta \Sigma_a \cos^2 Bx dx \cong -\phi_0^2 \Delta \Sigma_a \cdot 2x_p \quad (4.57)$$

- It yields the first-order perturbation reactivity :

$$\Delta \rho^{(1)} \cong -2 \cdot \frac{\Delta \Sigma_a}{\nu \Sigma_{f0}} \cdot \frac{x_p}{a} \quad (4.58)$$

, where $-\Delta \Sigma_a / \nu \Sigma_{f0}$: homogeneous change in Σ_a

x_p / a : the relative lengths of domains

- Change in Σ_a over entire separated homogeneous reactor composition ($x_p = a$) :

$$\Delta \rho^{(1)} = -\frac{\Delta \Sigma_a}{\nu \Sigma_{f0}} \quad (4.59)$$

- Effect of adjoint weighting

If Omitted,

$$\Delta \rho^{(1)} = \frac{-\int_{-x_p}^{x_p} \Delta \Sigma_a \phi_0(x) dx}{\int_{-a}^a \nu \Sigma_{f0} \phi_0(x) dx} \quad (4.60)$$

If $x_p = a$, the adjoint weighting has no influence. But, for a perturbation in a small change,

$$\Delta \rho^{(0)} \cong -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta \Sigma_a}{\nu \Sigma_{f0}} \cdot \frac{x_p}{a} \quad (4.61)$$

- This accounts for only a part of the total effect. The inclusion of the adjoint weighting shows that the importance of the center of perturbation is more pronounced

Five

THE POINT KINETICS EQUATIONS

5-1 The Exact Point Kinetics Equation

1) Exact

근사 없이 계산하는 시간, 공간, 에너지에 대한 의존성을 지닌 중성자 모델을 의미한다.

2) Exact Point Kinetics(일점 운동식) (식 3.51, 3.53과 비교)

1군 모델과 형태가 유사하다(유사점).

$\rho, \beta, \Lambda, p, \xi_k, s$ 에 관해 자세한 정의를 가진다(차이점).

3) 식의 전개

보통 Henry에 의한 볼츠만 식(Boltzmann equation)에서 출발하나, 이 장에서는 확산 식(diffusion equation)에 기초를 두어 진행한다.

5-1A Flux Factorization and Weighting Functions

1) 분해(Factorization)

① 플럭스를 시간에만 의존적인 크기 함수(amplitude function), $p(t)$ 와 공간, 에너지 및 시간 의존적인 형태 함수(shape function) $\phi(\mathbf{r}, E, t)$ 로 분해한다.

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = p(t) \cdot \psi(\mathbf{r}, E, t)$$

② 시간에 따른 플럭스 변화가 플럭스 크기 변화와 상대적으로 짧은 시간 동안의 형태 변
화로 구성되면, 플럭스 분해가 유용하게 된다.

③ 분해의 유일화(unique)

-형태 함수의 시간 변화에서 크기(magnitude)를 제한하여, 시간 의존성을 주로 크기 함수에 할당한다.

-시간 및 에너지에 대한 적분을 통해 유일화 시킬 수 있다.

④ 일반화(Generalization)

-1st: 형태 함수를 시간 의존적 형태로 구성한다.

-2nd: 적분에 앞서 중성자 식에 가중함수(weight function) $w(\mathbf{r}, E)$ 를 곱한다.

-식 3.28의 좌변 $\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t}$ 에 가중함수를 곱한 뒤 분해하고 적분하면,

$$\int_V \int_0^\infty \frac{w(\mathbf{r}, E)}{v(E)} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} dE dV = \frac{dp(t)}{dt} \int_V \int_0^\infty \frac{w(\mathbf{r}, E) \psi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dE dV + p(t) \frac{d}{dt} \int_V \int_0^\infty \frac{w(\mathbf{r}, E) \psi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dE dV$$

우변과 같이 전개된다.

-동 적분에서 형태 함수의 시간에 따른 변화를 제한하면, 분해를 유일화 시킬 수 있다.

즉 우변의 두 번째 항 $p(t) \frac{d}{dt} \int_V \int_0^\infty \frac{w(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dEdV$ 를 상수라고 정하자 (근사 아님).

2) 가중함수(Weighting Ftn.)

① 가중함수의 선택 - 플럭스 분해의 유일화

-가중함수는 플럭스를 크기함수와 형태함수로 정확히 나누는 데 영향을 끼치므로 정확한 가중함수의 형태를 찾는 작업이 요구된다.

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = p^w(t) \cdot \psi^w(\mathbf{r}, E, t)$$

(superscript w means weighted)

$$\text{단, } \psi(\mathbf{r}, E, t) \simeq \phi_0(\mathbf{r}, E).$$

(편의를 위해 $t < 0$ 에서 정상(stationary) 상태를 가정하면 초기 플럭스가 됨)

-동 식의 결과에서 플럭스와 크기함수 $p(t)$ 는 근사 해를 가진다. 일점운동방정식(P.K.E.)은 반응도의 오차에 민감하게 반응하므로, 앞서 언급한 것처럼 플럭스를 제대로 분해하기 위해서는 가중함수를 바르게 선택해야 한다. 특히 가중함수는 공간, 에너지 및 시간에 의존적인 형태함수의 오차를 줄이는 방향으로 선택되는 것이 좋는데 이는 플럭스 분해의 유일화 효과를 얻기 위해서이다. 따라서 가중함수는 초기 adjoint 플럭스인 $\phi_0^*(\mathbf{r}, E)$ 로 선택해 준다. 즉, $w(\mathbf{r}, E) = \phi_0^*(\mathbf{r}, E)$ 로 선택한다. 이 과정을 통하면 형태함수 $\psi(\mathbf{r}, E, t) \simeq \phi_0(\mathbf{r}, E)$ 와 가중함수 $w(\mathbf{r}, E) = \phi_0^*(\mathbf{r}, E)$ 의 곱셈 계산이 쉬워지게 된다. 따라서 이러한 가중함수의 선택에 따라

$\int_V \int_0^\infty \frac{\phi_0^*(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dEdV = K_0$ 인 상수로 계산되어 형태함수가 1) ④의 번째 [-]의 제한 조건을 만족할 수 있다.

(대개 adjoint인 켈레 식/값의 경우 원함수와 adjoint함수의 곱은 scalar인 실수(real)로 얻어지게 되는데, 행렬인 경우와 복소수의 경우가 좋은 예가 된다)

② 가중함수의 선택 - 형태함수의 정규화

-가중함수의 선택은 형태함수의 정규화(normalization)에도 영향을 미친다; 정규화되지 않은(unnormalized), 알고 있는 형태함수 $\psi^{un}(\mathbf{r}, E, t)$ 의 공간과 에너지에 대한 적분 값은 일반적으로 시간에만 의존하게 될 것이다. 가중함수가 없는 경우와 있는 경우를 생각해서 적분을 따져보면

$$\int_V \int_0^\infty \psi^{un}(\mathbf{r}, E, t) dEdV = \widehat{\psi}_1(t)$$

$$\int_V \int_0^\infty w(\mathbf{r}, E)\psi^{un}(\mathbf{r}, E, t) dEdV = \widehat{\psi}_w(t)$$

로 적을 수 있다. 두 식 모두 우변을 ψ^{un} 로 나누어 주면 각각 형태함수 ψ^1 와 ψ^w 로

구성된다. 이들은 서로 다른 시간 의존성을 가지며 모든 시간에 대해 서로 다른 제한 조건을 지닌다.

$$\int_V \int_0^\infty \phi^1(\mathbf{r}, E, t) dE dV = 1 \text{ for all } t$$

$$\int_V \int_0^\infty w(\mathbf{r}, E) \phi^w(\mathbf{r}, E, t) dE dV = 1 \text{ for all } t$$

크기함수가 이 차이점을 없애도록 구성되면, 플럭스

분해 $\phi(\mathbf{r}, E, t) = p^w(t) \cdot \phi^w(\mathbf{r}, E, t)$ 를 유일하게 만들 수 (유일화) 있다.

5-1B Derivation of the Exact Point Kinetics Equations for an Initially Critical Reactor

1) 독립적 중성자원이 없는 시간 의존적인 확산 식의 형태 (3.2A 참조)

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (F_p - M)\Phi + S_d \quad \dots(1)$$

(F_p 는 즉발원, S_d 는 지발원을 의미)

2) 노심 상태의 기술

① 반응로는 $t \leq 0$ 에서 임계임을 가정하면,

$$0 = (F_{p0} - M_0)\Phi_0 + S_{d0} \quad \dots(2).$$

② 식 3.29c와 식 3.32로부터 정상(stationary) 상태의 지발 중성자원은,

$$S_{d0} = F_{d0}\Phi_0 \quad \dots(3)$$

이다.

③ $F_0 = F_{p0} + F_{d0}$ 라 하면, 정상상태의 즉발 및 지발 중성자원은,

$$0 = (F_0 - M_0)\Phi_0 \quad \dots(4).$$

여기서 $F_0\Phi_0$ 는 지발 중성자를 포함하는 식으로서,

$$F_0\Phi_0 = \chi_p(E) \int_0^\infty v_p \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi_0(\mathbf{r}, E') dE' \quad \dots(5)$$

$$+ \sum_k \chi_{dk}(E) \int_0^\infty v_{dk} \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi_0(\mathbf{r}, E') dE'$$

로 나타낼 수 있다.

3) 시간 의존성의 배제

반응도의 개념에서 off-criticality의 정도를 기술하기 위해 F_d 를 넣어 F 를 만들고 다시 F_d 를 뺀 후 바꾸어 쓰면 식 (1)은,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (F - M - F_d)\Phi + S_d \quad \dots(6).$$

식 (5)와 유사하게 생각하면, $F\Phi$ 는

$F\Phi = \chi(E) \int_0^\infty v \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi_0(\mathbf{r}, E', t) dE'$ 로 주어짐을 알 수 있다. 이 때 총

$\chi(E)\nu\Sigma(\mathbf{r}, E')$ 값의 정의가 즉발 및 지발 분열 중성자원의 합과 늘 같지 않으므로 오차를 야기할 수 있다. 따라서 정역학적인 문제로 바꾸어, 즉 시간 의존성을 없애고 계산할 수 있다.

4) 의사-정상상태 지발 중성자원(quasi-stationary delayed neutron source)

마치 정상상태인 양 지발 중성자원을 기술하는 방법을 뜻한다. $F_d\Phi$ 이 *정확한 시간 t 에서의 실제 지발 중성자원을 의미하지 않는다.* 따라서 의사-정상상태 지발 중성자원의 개념을 도입한다. 이는 정상상태 노심에서, 마치 정확한 시간 t 에서 존재하는 중성자 플럭스나 반응 단면적을 지니고 하나의 지발 중성자원이 생성된다고 ‘생각’하는 것이다.

5) 확산식의 변형

- ① 식 (6) $\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (F - M - F_d)\Phi + S_d$ 에 초기의 adjoint 플럭스를 곱하고, 공간과 에너지를 통해 적분하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_0^*, \frac{1}{v} \Phi) = (\Phi_0^*, [F - M]\Phi) - (\Phi_0^*, [F_d]\Phi) + (\Phi_0^*, S_d) \dots (7)$$

과 같은 식을 얻는다. 여기서 초기의 adjoint 플럭스는 adjoint 문제 $(F_0 - M_0)\Phi_0^* = 0$ 의 해와 같다(adjoint의 성질에서 - 차원이나 컬레가 같은 경우 동일한 식을 의미).

- ② 동 식 (7)은 대개 연산자 F 와 M 의 시간 $t=0$ 와 $t=t$ 의 값들 간 차이를 이용해서 다르게 나타낼 수도 있다.

$$\Delta F = F - F_0 \dots (8)$$

$$\Delta M = M - M_0 \dots (9) \text{ 이고}$$

앞서 ①에서 $(\Phi_0^*, [F_0 - M_0]\Phi) = (\Phi_0^*, [F_0 - M_0]\Phi_0^*) = 0 \dots (10)$ 에서,

$$F = \Delta F + F_0, \quad M = \Delta M + M_0 \dots (11)$$

$$F - M = \Delta F + F_0 - \Delta M - M_0 \dots (12) \text{ 이므로}$$

(식 (10)에서 $F_0 = M_0 = 0$ 이므로)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_0^*, \frac{1}{v} \Phi) = (\Phi_0^*, [\Delta F - \Delta M]\Phi) - (\Phi_0^*, [F_d]\Phi) + (\Phi_0^*, S_d) \dots (13)$$

을 얻을 수 있다.

6) 플럭스 분해

- ① 5장 앞부분에 소개된 플럭스 분해를 식 (13)에 적용하고, 식 (13)과 식 (7)은 중요도-가중(importance-weighted) 의사-정상상태 핵분열 중성자원으로 나뉜다. 그러면서 플럭스 형태함수 $\Psi(\mathbf{r}, E, t)$ 를 생성하게 된다.

$$F(t) = (\Phi_0^*, F \Psi) \dots (14)$$

- ② 제한조건 $\int_V \int_0^\infty \frac{\phi_0^*(\mathbf{r}, E)\phi(\mathbf{r}, E, t)}{v(E)} dE dV = K_0$ 는 식 (13)에서 플럭스 크기함수만의 다른 운동식인

$$\Lambda(t)p(t) = [\rho(t) - \beta(t)]p(t) + s_d(t) \dots (15)$$

$$\text{단, } s_d(t) = \frac{(\Phi_0^*, \sum_k \chi_{dk} \lambda_k C_k)}{F(t)} = \frac{F_0}{F(t)} \cdot \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \quad \dots(16)$$

를 만들어 낸다. $s_d(t)$ 에는 "reduced"되었다고 표현되는 adjoint된 가중 적분형태가 들어있다(마찬가지로 선행핵(precursors)의 수밀도 또한 "reduced"되었다고 표현한다).

③ ②의 식은 exact 운동식에서 다음과 같이 변형된다.

$$\Lambda(t) = \frac{(\Phi_0^*, \frac{1}{\nu} \Psi)}{(\Phi_0^*, F \Psi)} = \frac{K_0}{F(t)} \quad (\text{식 (14) 및 ② 참조}),$$

$$\rho(t) = \frac{1}{F(t)} \cdot (\Phi_0^*, [F - M] \Psi) \quad (\text{식 (7)로부터}),$$

$$\text{or } \rho(t) = \frac{1}{F(t)} \cdot (\Phi_0^*, [\Delta F - \Delta M] \Psi) \quad (\text{식 (13)으로부터}),$$

$$\beta(t) = \frac{1}{F(t)} \cdot (\Phi_0^*, F_d \Psi) = \sum_k \beta_k(t),$$

$$(\text{단, } \beta_k(t) = \frac{1}{F(t)} \cdot (\Phi_0^*, F_{dk} \Psi)),$$

$$\text{and } \zeta_k(t) = \frac{1}{F_0} (\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k).$$

$\zeta_k(t)$ 는 중요도 가중 감소(importance-weighted reduced) 지발 중성자원에서 구해진다. 또한 $\zeta_k(t)$ 의 분모에서 F_0 는 다음과 같이 사용된다.

$$s_d(t) = \frac{1}{F(t)} \cdot (\Phi_0^*, S_d) = \frac{F_0}{F} \sum_k \frac{\lambda_k}{F_0} (\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k) = \frac{F_0}{F} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \quad \dots(17).$$

④ 공간 및 시간 의존적인 선행핵 balance 식은 감소되는 선행핵 $\zeta_k(t)$ 에 대한 balance 식을 만들어야만 한다. 따라서 식 3.32,

$$-\frac{\partial C_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_k C_k(\mathbf{r}, t) + \int_0^\infty \nu_{dk} \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \quad \dots(\text{식 3.32})$$

에는 $\phi_0^*(\mathbf{r}, E)$ 와 $\chi_{dk}(E)$ 가 모두 곱해진다.

$$-\frac{d}{dt} (\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k) = -\lambda_k (\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k) + (\Phi_0^*, F_{dk} \Psi) p(t), \quad \dots(18)$$

동 식은 시간 의존적 함수 $F_0 = (\Phi_0^*, F_0 \Psi_0)$ 로 나뉜다. 왜냐하면 좌변은 상수가 될 수 있기 때문이다. 따라서 감소하는 선행핵종에 있어, 정확한 balance 식은 ③의 정의를 도입하면 알 수 있듯이

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \frac{F(t)}{F_0} \beta_k(t) p(t) \quad \dots(19) \text{이다.}$$

⑤ 익숙한 형태로 만들기 위해서 식 (19)를 F_0 대신 시간에 비의존적인 K_0 로 나눈다.

K_0 는 $K_0 = F(t) \cdot \Lambda(t)$ 인 값이다. 이 과정을 통해 식 (19)는

$$\dot{c}_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + \frac{1}{\Lambda(t)} \beta_k(t) p(t) \quad \dots(20).$$

$$\left(\text{단, } c_k(t) = -\frac{(\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k)}{K_0} = -\frac{(\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k)}{F(t) \cdot \Lambda(t)} \right)$$

- ⑥ 식 (19)와 (20)은 $\frac{1}{\Lambda}$ 가 있고 없음에 차이가 있다. 식 (20)에는 $\frac{1}{\Lambda}$ 가 있고 식 (19)에는 $-\frac{F(t)}{F_0}$ 가 있다. 식 (20)의 경우 $\frac{1}{\Lambda}$ 의 항에서 Λ 가 되는 가정을 하면 안되므로 정확한 운동식은 아래 형태로 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \frac{1}{\Lambda_0} \sum_k \lambda_k \xi_k(t) \quad \dots (\text{두 번째 항은 초기값}) \\ \dot{\xi}_k(t) &= -\lambda_k \xi_k(t) + \frac{F(t)}{F_0} \beta_k(t) p(t) \quad \dots (19) \end{aligned}$$

다른 형태로는,

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \sum_k \lambda_k c_k(t), \\ \dot{c}_k(t) &= -\lambda_k c_k(t) + \frac{1}{\Lambda(t)} \beta_k(t) p(t). \end{aligned}$$

(35쪽에 기술된 까닭으로 인하여 사용하지 않음)

Five

THE POINT KINETICS EQUATIONS

5-1C Derivation of the Exact Point Kinetics Equations for an Initially Subcritical Reactor

임계상태	미임계상태
$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbb{F}_p - \mathbb{M})\Phi + S_d \quad (5.11)$	$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbb{F}_p - \mathbb{M})\Phi + S_d + S \quad (5.36)$ <p style="font-size: small;">▷ 초기에 어떠한 크기의 중성자속이 일정하게 유지되고 있으려면, 외부에서 중성자를 공급해주어야만 한다.(homogeneous가 아니게 된다.)</p> $S = S(\vec{r}, E, t) \quad (5.37)$
$0 = (\mathbb{F}_{p0} - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_{d0} \quad (5.12)$	$0 = (\mathbb{F}_{p0} - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_{d0} + S_0 \quad (5.38)$
$0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)\Phi_0 \quad (5.14)$	$0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_0 \quad (5.39)$

▷ 초기 상태가 미임계인 원자로의 exact point kinetics equation은 초기가 임계(chapter 5-1B)인 원자로와 구하는 과정이 같다. 다만 weighting function이 다를 뿐이다.

▷ Initially subcritical의 adjoint는 initially critical과 달리 유일하지 않다.

/(참고)

An adjoint function for a subcritical system is introduced as the solution of the following inhomogeneous problem.

$$(\mathbb{M}_0^* - \mathbb{F}_0^*)\Phi_{\text{det}}^* = \Sigma_{\text{det}}(\vec{r}, E) \quad (5.40)$$

단, $\Sigma_{\text{det}}(\vec{r}, E)$: the macroscopic neutron capture of fission cross section of a neutron detector

Φ_{det}^* : the flux response to the injection of source neutrons measured by the special detector, which is characterized by $\Sigma_{\text{det}}(\vec{r}, E)$ /

두 개의 다른 adjoint problem이 사용된다.

$$\textcircled{1} (\mathbb{M}_0^* - \lambda_0 \mathbb{F}_0^*)\Phi_{\lambda_0}^* = 0 \quad (5.41)$$

$$\textcircled{2} (\mathbb{M}_0^* - \mathbb{F}_0^* + \frac{\alpha_0}{v})\Phi_{\alpha_0}^* = 0 \quad (5.42)$$

Equations ①: initial adjoint λ mode

②: initial adjoint α mode

(See Sec. 11-4A) 그러나 대개 $\Phi_{\lambda 0}^*$ 가 $\Phi_{\alpha 0}^*$ 보다 더 정확히 예측한다.

$$0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + \mathbb{S}_0 \quad (5.39) \xrightarrow{\text{convert}} \quad 0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0 + \mathbb{S}_0)\Phi_0 \quad (5.43)$$

$$\text{단, } \mathbb{S}_0\Phi_0 = \mathbb{S}_0(\vec{r}, E) \quad (5.44)$$

(균일하지 않은 상태 \rightarrow 균일한 상태로 바꾸는 과정)

$$0 = (\mathbb{F}_0^* - \mathbb{M}_0^* + \mathbb{S}_0^*)\Phi_{h0}^* \quad (5.45)$$

식 (5.44)는 unique해서 식 (5.43)의 결과에 영향을 끼치지 않지만, \mathbb{S}_0 는 unique하지 않기 때문에 서로 다른 \mathbb{S}_0 는 서로 다른 Φ_{h0}^* 를 유도한다.

초기 상태가 미임계인 시스템은 초기 상태가 임계인 시스템의 경우와 같은 방법으로 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\text{임계 원자로} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_0^*, \frac{1}{v}\Phi) = (\Phi_0^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Phi) - (\Phi_0^*, \mathbb{F}_d\Phi) + (\Phi_0^*, S_d) \quad (5.18)$$

$$\text{미임계 원자로} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\lambda 0}^*, \frac{1}{v}\Phi) = (\Phi_{\lambda 0}^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Phi) - (\Phi_{\lambda 0}^*, \mathbb{F}_d\Phi) + (\Phi_{\lambda 0}^*, S_d) + (\Phi_{\lambda 0}^*, S) \quad (5.46)$$

식 (5.46)는 초기 원자로가 임계가 될 때 식 (5.18)로 근접할 것이다.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\lambda 0}^*, \frac{1}{v}\Phi) = (\Phi_{\lambda 0}^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Phi) - (\Phi_{\lambda 0}^*, \mathbb{F}_d\Phi) + (\Phi_{\lambda 0}^*, S_d) + (\Phi_{\lambda 0}^*, S) \xrightarrow{\text{inserting}}$$

$$\phi(\vec{r}, E, t) = p(t) \cdot \psi(\vec{r}, E, t)$$

강제조건을 사용하면,

$$\int_V \int_E \frac{\phi_{\lambda 0}^*(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, E, t)}{v(E)} dE dV = K_0 \quad (5.47)$$

그리고 다음 변수로 양변을 나누어주면,

$$F_\lambda(t) = (\Phi_{\lambda 0}^*, \mathbb{F}\Psi) \quad (5.48)$$

초기 상태가 미임계 원자로의 경우 결과적으로 다음과 같이 된다.

$$\therefore \dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \frac{1}{\Lambda_0} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \frac{s(t)}{\Lambda(t)} \quad (5.49a)$$

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \frac{F_\lambda(t)}{F_{\lambda 0}} \beta_k(t) p(t) \quad (5.49b)$$

cf)임계 원자로의 경우

$$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \frac{1}{\Lambda_0} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \quad (5.34a)$$

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \frac{F(t)}{F_0} \beta_k(t) p(t) \quad (5.34b)$$

정의:

$$s(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, S) \quad (5.50)$$

초기 상태가 미임계인 시스템의 운동방정식으로 구한 시간에 의존하는 반응도는 exact static의 반응도와 같은 형태로 주어진다.

$$\rho(t) = \frac{(\Phi_{\lambda_0}^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi)}{(\Phi_{\lambda_0}^*, \mathbb{F}\Psi)} \quad (5.51)$$

$$\rho(0) = \frac{(\Phi_{\lambda_0}^*, [\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Psi_0)}{(\Phi_{\lambda_0}^*, \mathbb{F}_0\Psi_0)} = \frac{(\Psi_0, [\mathbb{F}_0^* - \mathbb{M}_0^*]\Phi_{\lambda_0}^*)}{(\Psi_0, \mathbb{F}_0^*\Phi_{\lambda_0}^*)} = \rho_0 = \rho_0^{st} \quad (5.52)$$

$\rho(t)$ 와 초기 static reactivity ρ_0 의 차이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi) \quad (5.53a)$$

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \quad (5.53b)$$

$$\rho_0 = 1 - \lambda_0 = \rho_0^{st} \quad (5.53c)$$

Eq. (5.53)을 증명하면.

$$\begin{aligned} \delta\rho(t) \cdot F_\lambda(t) &= (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi) = (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M} - (\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)]\Psi) \\ &= (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi) = (\Phi_{\lambda_0}^*, [(1 - \rho_0)\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi) \\ &= (\Phi_{\lambda_0}^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi) - \rho_0(\Phi_{\lambda_0}^*, \mathbb{F}\Psi) = [\rho(t) - \rho_0]F_\lambda(t) \end{aligned} \quad (5.54)$$

5-1D Reactivity in the Exact Point Kinetics Equations

* One dollar (1\$=100cents) [reactivity units]

: a reactivity or a reactivity increment in the amount of β

$$\beta(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, F_d\Psi) ; \beta \text{는 } t \text{의 함수이지만 종종 } \beta(t) = \beta_0 \text{로 놓는다.}$$

* exact kinetics equation에서 나타난 반응도($\rho^{dyn}(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, [\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi)$)를

“dynamic reactivity”라 부른다. ρ^{dyn} 는 시간에 의존하는 중성자속($\phi(\vec{r}, E, t)$)으로 형성된데 반해 ρ^{st} 는 perturbed system의 λ 모드 중성자속($\Phi_\lambda(\vec{r}, E)$)으로 형성되었다.

* 만약 exact point kinetics equation에 사용한 flux와 adjoint flux가 부정확하다면 그에 따라 결과로 구한 반응도도 부정확할 것이다.(부정확하다면, zero-order term이 가장 많이 기여할 것이다.) 반응도의 오차를 제거하기 위해서는 $\rho^{dyn}(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, [\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi)$ 보다

$$\rho^{dyn}(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, [\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi)$$

로써 반응도를 구하여야 한다.(zero-order를 사용하기 보다는 first-order 자체로 구하는 것이 오차가 적다. ⇒chapter 11)

* 반응도를 일정하게 하는 것은 dynamic의 경우가 static인 경우보다 중요하다.

* Chapter 5-1C에서 보듯 사실 외부 소스가 주어지는 미임계 상태의 원자로의 초기 조건은 균일하지 않다. 다시 말해 exact static reactivity 식에서와 같은 개념으로 초기 adjoint flux가 사용될 수 없다.

* Eq. (5.53b)에서 반응도는 두 개의 항으로 나뉜다.

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \quad (5.55a)$$

Weighting function으로서 $\Phi_{\lambda_0}^*$ 가 사용되므로 초기 반응도 ρ_0 는 static 상태의 반응도와 같아진다.

$$\rho_0 = \rho_0^{st} \quad (5.55b)$$

$$\delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi) \quad (5.56)$$

식(5.56)의 분자는 다음의 조건으로 인하여 0차, 1차, 2차 항으로 나뉘질 수 있다. $\Delta\mathbb{F} = \mathbb{F} - \mathbb{F}_0$, $\Delta\mathbb{M} = \mathbb{M} - \mathbb{M}_0$ 그리고, ψ 또한 같은 개념으로 분해해 보면 다음과 같아진다.

$$\psi(\vec{r}, E, t) = \psi_0(\vec{r}, E) + \Delta\psi(\vec{r}, E, t) \quad (5.57)$$

$$\text{식 (5.57)을 다음 식에 대입} \quad \delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi) \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{result}} \quad \delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} \{ & (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Psi_0) + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi_0) \\ & + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Delta\Psi) + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Delta\Psi) \} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$\Phi_{\lambda_0}^*$ 가 다음 조건을 만족하므로

$$\int_V \int_E \frac{\phi_{\lambda_0}^*(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, E, t)}{v(E)} dE dV = K_0$$

$$(\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Psi_0) = 0 \text{ and } (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Delta\Psi) = 0$$

$(\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \Delta \mathbb{F} - \Delta \mathbb{M}] \Delta \Psi)$ [This term contains differences in operators and in the flux shape. Both of these differences are initially zero and develop after the onset of the transient.]

∴ 반응도, $\delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \mathbb{F} - \mathbb{M}] \Psi)$ 는 만약 Ψ_0 가 초기 중성자속의 형태와 같다면 초기 상태가 임계인 원자로에서 구한 식과 같아진다.

First-order perturbation theory에서 Ψ 는 초기 λ mode에서 다음과 같이 Ψ_{λ_0} 를 포함하는 항으로 나누어질 수 있다.

$$\psi(\vec{r}, E, t) = \psi_{\lambda_0}(\vec{r}, E) + \Delta\psi_\lambda(\vec{r}, E, t) \quad (5.59)$$

$$\text{식 (5.59)을 대입} \quad \delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \mathbb{F} - \mathbb{M}] \Psi)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{result}} \delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)} \{ & (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0] \Psi_{\lambda_0}) + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \Delta \mathbb{F} - \Delta \mathbb{M}] \Psi_{\lambda_0}) \\ & + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0] \Delta \Psi_\lambda) + (\Phi_{\lambda_0}^*, [\lambda_0 \Delta \mathbb{F} - \Delta \mathbb{M}] \Delta \Psi_\lambda) \} \end{aligned} \quad (5.60)$$

식 5.58과 식 5.60에서 각각 우변의 첫 번째, 세 번째 항은 0이 된다. 두 번째 항이 main 항이 되고 네 번째 항을 살펴보면 식 5.58은 초기에는 0이지만 시간이 지나면 크기를 가진다.(2차 방정식 형태) 식 5.60에서는 선형형태이다.

(see Sec 9-2 and chapter 11)

Five

THE POINT KINETICS EQUATIONS

5-1E Effective Delayed Neutron Fractions and Further Discussion of the Exact Point Kinetics Equations

* 유효지발 중성자 생성비율-("Effective" delayed neutron fraction), $\beta(t)$ 는 'adjoint flux weighting'을 하지 않은 β 와는 다른 값을 가진다. 이러한 차이는 'adjoint flux'가 공간 뿐만아니라 에너지에 대해서도 의존성을 가지게 되면서 생겨나게 된다. 'adjoint flux'의 에너지 의존성이 지발 중성자들의 'emission spectra' 에 대한 적절한 가중치를 제공하기 때문이다.

* 이러한 성질을 알아보기 위해, 'initial adjoint flux' 값의 separation approximation을 하면 식 (5.61)과 같이 나타내게 된다. :

$$\phi_0^*(r, E) \cong \phi_0^*(r) \varphi^*(E) \quad (5.61)$$

* 이 식(5.61)을 β_k 를 위한 식(5.62) 에 대입을 해보면 식 (5.63)과 같이 된다.

$$\beta_k = \frac{(\Phi_0^*, F_{dk}\Psi)}{(\Phi_0^*, F\Psi)} \quad (5.62)$$

$$\beta_k \cong \frac{\int_E \chi_{dk}(E) \varphi_0^*(E) dE \int_V \phi_0^*(r) \nu_{dk} \int_E \Sigma_f(r, E') \psi(r, E') dE' dV}{\int_E \chi(E) \varphi_0^*(E) dE \int_V \phi_0^*(r) \bar{\nu} \int_E \Sigma_f(r, E) \psi(r, E') dE' dV} \quad (5.63)$$

* $\bar{\nu}$ 와 ν_{dk} 는 공간에 대해 약한 의존성을 가지므로 이 의존성을 무시하게 되면, 식 (5.64)으로 나타내게 된다.

$$\beta_k \approx \bar{\beta}_k \gamma_{dk} \quad (5.64a)$$

$$\bar{\beta}_k = \frac{\nu_{dk}}{\bar{\nu}} \quad (5.64b)$$

$$\gamma_{dk} = \frac{\int_E \chi_{dk}(E) \varphi_0^*(E) dE}{\int_E \chi(E) \varphi_0^*(E) dE} \quad (5.64c)$$

* 따라서 'single fissionable isotope' 에 대해서는 총 분열 중성자 emission spectra와 지발 중성자의 emission spectra의 비인 γ_{dk} 만큼 "effective one-group" β 의 값이 차이가 남을 알 수 있다.

* FBR에서는 표 5-1에서 보는 것과 같이 지발 중성자의 평균 importance가 모든 중성자의 평균 importance보다 18%이상 작다는 것을 알 수 있다.

이러한 현상 즉, 지발 중성자의 각 지발 그룹간의 importance의 편차가 작고 그에 비해 즉발 중성자와 지발 중성자간의 차이가 크게 나타나는 현상은 지발 중성자들의 에너지가 U-238의 fission cross section에서의 거의 문턱값 이하를 나타내고 있기 때문에 분열이 일어날 작은 기회를 지니게 되기 때문이다.

표 5-1 Relative Importance of Delayed and Prompt Fission Neutrons if FBRs

Delayed Neutron Group, k	Relative Importance of Delayed and Prompt Fission Neutrons, γ_{dk}
1	0.802
2	0.831
3	0.818
4	0.825
5	0.825
6	0.825

* 'Thermal reactor' 에서는, 지발 중성자들은 즉발 중성자에 비해 더 큰 importance를 가지게 된다. U-238에서 속 분열의 문턱값 아래의 중성자들이 빠른 감속을 하기 때문에 속 분열은 minimal한 importance를 가진다. 그래서 에너지의 감소에 대하여 증가하는 $E\varphi_0^*(E)$ 는 지발중성자와 즉발중성자의 평균 importance에 대해 지배적인 위치를 가지게 된다. 따라서 이는 'Thermal reactor'에서 지발 중성자의 importance들이 즉발 중성자의 그것보다 큰 값을 지니게 되는 것이다.

* 지발 중성자는 평균적으로 즉발 중성자가 가지는 에너지의 절반에 해당하는 에너지를 가지고 생성이 된다. 그러므로 열중성자를 이용하는 열 원자로에서는 그 양은 작지만 에너지가 작으므로 핵분열을 일으키는데 있어서 즉발 중성자보다 효과가 크다. 따라서 실제 원자로 응용 문제에서는 이의 효과를 고려한 유효지발중성자율, β_{eff} 를 사용하게 되며 β_{eff} 의 크기는 β 보다 약간 크다. 표 6.1은 경수로 원자로에서의 β_{eff} 값과 실제적인 β 값과의 비교 표이다.

표 6-1 U-233, U-235, Pu-239 의 지발중성자율과 유효지발중성자율 (경수로 원자로)

핵종	지발 중성자율 β	유효지발 중성자율 β_{eff}
U^{233}	0.0026	0.003
U^{235}	0.0065	0.0070
Pu^{239}	0.0021	0.0023

* 만일 원자로가 한가지 이상의 핵분열성 물질로 구성되어 있으면 전지발중성자 생성비율과 유효지발중성자비율은 구성 핵종들에 대한 값들의 가중치로 구해지게 된다.

‘two fissionable isotopes’의 경우 , 예를 들어 Pu-239 와 U-238의 경우,

$$\beta_k \cong \frac{\int_E \chi_{dk}(E)\varphi_0^*(E)dE}{\int_E \chi(E)\varphi_0^*(E)dE} \times \frac{\int_V \phi_0^*(r)[\nu_{dk9}R_{f9}(r) + \nu_{dk8}R_{f8}(r)]dV}{\int_V \phi_0^*(r)\bar{\nu}R_f(r)dV} \quad (5.65)$$

(단, R 은 an energy-integrated reaction rate이다.)

* 식 (5.65) 의 표현은 양 핵종이 $\bar{\nu}R_f$ 에 영향을 주고 있다는 것을 제외하곤 본질적으로 식 (5.63)과 같은 것이다. 그러나 실제로 Pu-239에 비교하여 U-238이 높은 지발 중성자 yield를 가지기 때문에 U-238의 효과가 크게 영향을 키친다. 식(5.65)의 괄호() 안의 $R_{f9}(r)$ 을 제거하게 됨으로써 표 5-2에서는 지발 중성자 생산에 대한 U-238의 역할의 강한 ‘space, delay group, and system’에 대한 의존성을 보여준다.

$$\bar{\nu}_{dk}(r) = \nu_{dk9} + \nu_{dk8} \frac{R_{f8}(r)}{R_{f9}(r)} \quad (5.66)$$

표 5-2 Comparison Pu-239 and U-238 Contributions
to the Production Rate of Delayed Neutrons

Delayed Neutron Group, k	Core Center	Core/Blanket Interface
	Percentage Addition of U-238-Produced Delayed Neutrons to Pu-239 Contribution	
	$100 \frac{v_{dk8}}{v_{dk9}} \frac{R_{f8}}{R_{f9}}$	
1	29	17
2	44	26
3	71	42
4	105	62
5	182	108
6	315	185
	$\frac{R_{f8}}{R_{f9}}$	
	0.142	0.0836

* $\phi^*(r,E)$ 의 에너지 의존성으로부터 기인한 β 의 총 감소 정도는 공간에 의한 그것 보다 크다. 그러나 오래사는 핵종의 경우에는 'increase due to spatial adjoint flux weighting' 이 'decrease due to spectral adjoint flux weighting' 보다 클 수 있다.

* 식(5.65)는 one-group β 에 대해 다음과 같이 쓰여질 수 있다. :

$$\beta_k = \gamma_{dk} \left(\beta_{k9} \frac{S_{f9}^*}{S_f^*} + \beta_{k8} \frac{S_{f8}^*}{S_f^*} \right)$$

with $S_{fi}^* = \int_V \Phi_0^*(r) R_{fi}(r) dV$

식(5.67)의 괄호 안의 표현들은 γ_{dk} 가 'spectral weighting' 의 효과를 가짐에 대한 나머지가 'spatial adjoint flux weighting'의 효과를 나타낸다.

* 'integral kinetics parameter' 들은 아래 식 (5.26)의 표현에 따라 F(t)를 가지고 있다. 이러한 표현은 정적 반응도-'static reactivity' 의 'form'에 따라 동적 반응도-'dynamic reactivity'를 적용하기 위해 도입되었다. 각각 $\Lambda(t)$ 를 나누어주게 되면, 그 F(t)라는 것이 사라지게 됨을 알 수 있다. 따라서 P.K.E의 p(t)는 F(t)에 의존적이지 않다. 실제로 'integral kinetics parameters' 는 ρ/Λ 와 β/Λ 같이 표현 되게 된다.

$$\Lambda(t) = \frac{(\Phi_0^*, \frac{1}{v}\Psi)}{(\Phi_0^*, F\Psi)} = \frac{K_0}{F(t)}$$
$$\rho(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, [F - M]\Psi) \dots\dots\dots (5.26)$$
$$\beta(t) = \frac{1}{F(t)} (\Phi_0^*, F_d\Psi)$$

5-2 The Point Reactor Model

* 만약 $\psi(r,E,t)$ 를 풀고, 식 (5.26)의 "exact" definitions 으로부터 $\rho(t), \beta_k(t)$, and $\Lambda(t)$ 의 값들을 찾기 위해서는 amplitude function $p(t)$ 를 결정하는 exact point kinetics 식에 그것들을 사용 할 수 있을 것이다. 그러나 그러한 shape functions들의 생성을 위해서는 full (r,E,t) 의존 문제의 해들이 필요하다. (see ch-11 -_-)
여기서는 가장 흔하게 사용하는 approximate 접근 방법인 'point reactor model'을 언급하고자 한다.

* 이를 위해서 exact point kinetics 식으로부터 한 가지 주요한(major) 단순화와 두가지 세세한(minor) 단순화를 한다. 'major' 단순화는 flux shape의 시간 의존성을 초기 flux sharp값으로 동일시 함으로 이를 무시하는 것이다.

$$\psi(r, E, t) \cong \phi_0(r, E)$$

두가지 'minor' 단순화는 다음과 같다. 식 (5.23)에 있는 $F(t)$ 라는 값을 그것의 초기값으로 대체 시킨다. :

$$F(t) \rightarrow F_0 = (\Phi_0^*, F_0, \Psi_0)$$

또한 지발 분열 중성자 연산자 F_d 를 초기 연산자 값으로 approximate 시킨다. :

$$F_d \simeq F_{d0}$$

* 이러한 3가지 단순화는 다음과 같은 결과를 가져온다. :

1. $\rho(t) \rightarrow \rho^{(1)}(t) = \frac{1}{F_0} (\Phi_0^*, [\Delta F - \Delta M] \Phi_0)$
2. $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_0 = \frac{K_0}{F_0}, \frac{F_0}{F(t)} \rightarrow 1$
3. $\beta_k(t) \rightarrow \beta_{k0} = \frac{1}{F_0} (\Phi_0^s, F_{dk0} \Phi_0)$

* 이에 따라 완성된 'Point Kinetics equations' :

$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} p(t) + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t)$	$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{\lambda} p(t) + \sum_k \lambda_k c_k(t)$
$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \beta_k p(t)$	$\dot{c}_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + \frac{\beta_k}{\lambda} p(t)$

..... (5.74)

Six

SOLUTION OF BASIC KINETICS PROBLEMS

대부분의 동역학 문제들은 다양한 지발중성자 그룹의 거동으로 인해 복잡한 해를 가지게 된다. 때문에, 주어진 문제에 대한 수치해(numerical solution)를 얻기 위해서는 컴퓨터 프로그램이 필요하다. 그러나 근사된 모델을 통한 해석해(analytical solution) 역시 매우 중요하다고 할 수 있다. 이러한 해석해가 basic kinetics parameter들 간의 관계를 밝히고 그로인해 도출된 결과를 이해하는데 도움을 주기 때문이다. 우리는 이러한 analytical relation을 통해 수치해를 점검해 볼 수도 있을 것이다.

어떤 문제를 해석적으로 다룸에 있어 그 결과를 쉽게 이해할 수 있도록 최대한 간단하게 제시한다. 어느 정도 간단하게 하느냐에 따라 아래의 두 가지 근사(approximation)중 하나 이상을 도입하게 된다.

1. 6개의 지발중성자 그룹을 하나의 'effective group'으로 근사 (Sec 6-1)

2. 고속로/경수로에서 중성자 generation time을 적절하게 작게 잡음으로서 kinetics equation 간략화

위의 두 가지 근사를 바탕으로 얻어진 결과는 모든 경수로나 고속로에 적용할 수 있다. 특히 두 번째 근사방법은 고속로에서 더 정확한데 그 이유는 고속로의 neutron generation time 이 더 작기 때문이다.

어떻게 reactivity(반응도)를 구할 것인가 하는 것은 이러한 모델을 연구하는데 중요하지 않다. 그 결과는 상당히 일반적인 것이며, 원자로 구성의 변화 등으로 인한 반응도 변화를 계산하는데 적용되는 모델의 복잡성과는 독립적이다.

- β 와 Λ 의 시간 의존성은 무시되고 상수로 가정한다.
- 간단하게 하기위해 가장 중요한 class만 남긴다.
- $t \leq 0$ 에서 정상상태로 가정한다.

위 근사에 의해 이번 챕터에서 풀게 될 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{p}(t) = -\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} p(t) + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \xi_k(t) + \frac{1}{\Lambda} s(t) \quad (6.1a)$$

$$\dot{\xi}_k(t) = -\lambda_k \xi_k(t) + \beta_k p(t) \quad (6.1b)$$

$$\Lambda = \Lambda_k, \quad \beta = \beta_0 \text{ (constant)} \quad (6.1c)$$

또한, $F(t) = F_0$ (see 5.26a)

6-1. Kinetics for Small and Large Time Value

동역학 문제를 통해 간단하면서도 유용한 해를 얻으려면 지발중성자 source에 대한 보다 정확한

근사가 필요하다. 짧은 시간, 또는 긴 시간의 경과가 이에 미치는 영향을 살펴보자.

6-1A The Stationary Solution : Source Multiplication Formulas

Short time 에 대한 지발중성자 거동을 살펴보기에 앞서 우리는 정상상태 일점운동방정식을 통해

약간의 정보를 얻을 수 있다.

정상상태 운동방정식은 (6.1) 식의 시간 미분값을 0으로 놓고 λ 값을 소거하면 얻을 수 있다.

$$\dot{p} = 0 = (\rho_0 - \beta)p_0 + \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} + s_0 \quad (6.2a)$$

$$\zeta_k = 0 = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p_0 \quad (6.2b)$$

이때 (6.2a)에서 ρ_0 와 s_0 는 원자로가 임계일 때 0 이다.

위 식을 통해 우리는 ‘정상상태 해는 generation time (λ)에 독립적’이라는 것을 알 수 있다.

(6.2b) 식은 근사된 정상상태 선행핵 붕괴율(stationary decay rate)이 생성율과 같다는 것을

보여주고 있다. 즉,

$$\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$$

(6.2b)를 모든 지발중성자에 대해 더하면 임계/미임계 원자로의 stationary reduced 지발중성자에

대한 다음 형태를 얻을 수 있다.

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = \beta p_0 \quad (6.3)$$

(3.47)에서

$$\lambda_k \zeta(t) = \lambda_k \frac{\widehat{C}_k(t)}{\widehat{S}_0} \text{ 이므로 } (\widehat{S}_0 \text{ 는 초기 핵분열 중성자의 total source} = \nu \Sigma_f \widehat{\phi}_0)$$

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \frac{\widehat{C}_{k0}}{\widehat{S}_0} = -\frac{\widehat{S}_{d0}}{\widehat{S}_0} \quad (6.4)$$

$p_0 = 1$ ($\leftarrow \phi_0 = \phi_0$) 로 놓으면, (6.3)과 (6.4)에서

$$\widehat{S}_{d0} = \beta \widehat{S}_0 \quad (6.5)$$

따라서 stationary integrated 지발중성자 source 는 β 와 integrated total 핵분열중성자 source의 곱으로 나타난다.

미임계 원자로에서 (6.3)을 (6.2a)에 대입하면,

$$0 = \rho_0 p_0 + s_0 \quad (6.6)$$

(3.48)에서 $t=0$ 일때

$$s(t) = -\frac{\widehat{S}(t)}{\widehat{S}_0} \quad (s(t) : \text{relative independent source (3.48)})$$

$$\rightarrow s_0 = -\frac{\widehat{S}_0}{\widehat{S}_0} \quad (6.7)$$

$p_0 = 1$ 이므로 (6.6)과 (6.7)에서

$$\widehat{S}_0 = \frac{1}{-\rho_0} \widehat{S}_0 \quad (6.8a)$$

$\frac{1}{-\rho_0}$ 를 'source multiplication factor' 라 한다.

(이러한 source multiplication formula들은 앞으로 많이 등장하게 된다.)

static source multiplication factor를 구해보자

위 식의 양변에 \widehat{S}_0 를 더하고 $k_0 (= \frac{1}{1-\rho_0})$ 을 도입하면,

$$\widehat{S}_0 + \widehat{S}_0 = \widehat{S}_{tot,0} = \frac{\widehat{S}_0}{1-k_0} = \frac{\widehat{S}_0}{-\Delta k_0} \quad (6.8b)$$

(6.6)을 p 에 대해 바로 풀면

$$p_0 = \frac{s_0}{-\rho_0} \quad (6.8c)$$

만약 adjoint weighting을 적용한다면 source, ρ_0 , ξ_0 등은 다르게 정의되어야 할 것이다.

adjoint weighted 된 source multiplication formula 는 식(6.8)의 weighting 되지 않은 식보다

정확하다고 할 수 있다.

static adjoint weighted source multiplication formula 는 다음과 같다.

(6.8a)에서 $S_0 = F_0 \phi_0$ 이고, 양변에 adjoint flux를 곱하고 적분하면,

$$(\Phi_0^*, F_0 \Phi_0) = -\frac{1}{\rho_0} (\Phi_0^*, S_0) \quad (6.9a)$$

(6.8b)에서

$$(\Phi_0^*, [F_0 \Phi_0 + S_0]) = -\frac{1}{\Delta k_0} (\Phi_0^*, S_0) \quad (6.9b)$$

그리고 (6.7)과 (6.8c)에서

$$\rho_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{(\Phi_0^*, S_0)}{(\Phi_0^*, F_0 \Psi_0)} \quad (6.9c)$$

임계 원자로에서, $\rho_0 = s_0 = 0$ 이다.

(6.2a)에서

$$0 = -\beta \rho_0 + \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = -\beta \rho_0 + s_{d0} \quad \text{이므로}$$

$$\rho_0 = -\frac{s_{d0}}{\beta} \quad (6.11)$$

여기서 source multiplication factor는 $\frac{1}{\beta}$ 로 주어진다.

β 는 이 식에서 negative reactivity 역할을 하게 된다.

(6.11)식은 매우 중요한 사실을 시사한다.

즉, 지발중성자 source 가 유한한 플럭스 레벨을 유지시킴으로 인해 임계원자로는 미임계원자로

처럼 보일 수 있다는 것이다.

이 식의 물리적인 고찰은 7-1에서 이루어질 것이다.

또 다른 source multiplication formula 는 미임계 원자로에 대해 (6.2a) 식에서 얻어진다. ($S_0 > 0$)

$$\rho_0 = -\frac{s_0 + s_{d0}}{\beta - \rho_0} \quad (6.12)$$

즉, 미임계 정상상태의 flux amplitude(ρ_0) 는 independent source 와 delayed source 의 합으로

나타나며, 이때 source multiplication factor 는 reactivity 증가에 의해 결정된다.

6-1B Kinetics for Small Time Values

짧은 시간 변화에 대한 동역학적 변화를 살펴봄으로써 우리는 과도현상의 시작과 (onset of

transients) 지발중성자 그룹의 근사에 대해 알 수 있다.

비록 제어봉 삽입이나 냉각수 비등과 같은 갑작스러운 반응도 변화라도 실질적으로는 연속적인

현상이지만, 개략적으로 살펴볼 때에 한해 우리는 "steps" "ramps" 를 가정한다.

초기 임계상태인 경우 다음과 같다.

$$\text{reactivity step : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \rho_1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (6.13a)$$

$$\text{reactivity ramp : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ at & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (a : \text{reactivity insertion rate})(6.13b)$$

이 둘을 합치면 "limited ramp" 또는 "terminated ramp" 라고 한다.

$$\text{limited reactivity ramp : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ at & \text{for } 0 \leq t \leq t_1 \\ \rho_1 & \text{for } t \geq t_1 \end{cases} \quad (6.13c)$$

중성자 플럭스뿐 아니라 지발중성자 source 도 초기임계 원자로에 대한 즉각적인 반응도 step 삽입을 따라가지는 않을 것이다.

반응도에 의해 즉각적으로 변화하는 값은 \dot{p} 뿐이다.

$$\dot{p}(0) = -\frac{\rho_1 - \beta}{\Lambda} p_0 + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = -\frac{\rho_1}{\Lambda} p_0 \quad (6.14)$$

$$\zeta_k(0) = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p_0 = 0 \quad (6.15)$$

(6.14)식의 우변이 step change 하면 \dot{p} 도 step change 한다.

따라서 $p(t)$ 는 t=0에서 선형적으로 변화한다.

그에 비해 $\zeta_k(t)$ 는 t=0에서 0의 기울기를 가진다.

t=0에서 p 와 ζ 의 기울기를 이용해 짧은 시간 간격에 있어 지발중성자 source에 대한

다음 두 가지 근사가 가능하다.

1. 상수 지발중성자 source (CDS : constant delayed neutron source) 근사 :

$$s_d(t) = s_{d0} \quad (6.16)$$

2. 선행핵 축적 근사 (PA : precursor accumulation approximation) :

ζ 가 p 보다 훨씬 천천히 시작되기 때문에 선행핵 균형식에서 $\zeta_k = \zeta_{k0}$ 라고

놓고

$p(t)$ 는 시간에 따라 변화하도록 할 수 있다.

$$\zeta_k(t) = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p(t) \quad (6.17)$$

만약 $p(t)$ 가 시간에 따라 증가한다면, 위 근사는 다음과 같이 해석할 수 있을 것이다. :

‘새롭게 생성된 선행핵들은 축적되고 지발중성자 source에 기여한다.’

그러나 시간 t에서 붕괴되는 부분은 아직도 무시할 만큼 작다.

$\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$ 라고 하면, (6.17)에서

$$\zeta_k(t) = \beta_k (p(t) - p_0) \quad (6.18)$$

따라서 지발중성자 source 는 다음과 같다.

$$s_d(t) = s_{d0} + \sum_k \beta_k \lambda_k I(t) \quad (6.19)$$

$$I(t) = \int_0^t [p(t') - p_0] dt' \quad (6.20)$$

(6.19) 식에 다음을 도입한다.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_k \beta_k \lambda_k \quad (6.21)$$

(6.3)과 (6.21)에서 두개의 short time 근사는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = \beta p_0 \quad (6.3)$$

· CDS 근사 : 지발중성자원을 상수로 보는 것이므로

$$s_d(t) = \beta p_0 \quad (6.22)$$

· PA 근사 :

$$(6.21)에서 \quad \beta \bar{\lambda} = \sum_k \beta_k \lambda_k \text{ 이고}$$

(6.3)에서 $s_{d0} = \beta p_0$ 이므로 (6.19)에 대입하면,

$$s_d(t) = \beta p_0 + \beta \bar{\lambda} I(t) \quad (6.23)$$

이처럼 CDS 근사에서 지발중성자 data는 total β 값으로만 나타나며,

PA 근사에서는 $\beta_k \lambda_k$ 값을 더한 $\bar{\lambda}$ 가 나타난다.

따라서, PA 근사에서 새롭게 생성된 선행핵의 붕괴는 지발중성자 source를 증가시킨다.

$\bar{\lambda}$ 의 대표적인 값은

$$\bar{\lambda} \approx 0.4s^{-1} \text{ for } U^{235} \text{ fueled thermal reactors} \quad (6.24a)$$

$$\bar{\lambda} \approx 0.6s^{-1} \text{ for large mixed-oxide-fueled fast reactors} \quad (6.24b)$$

위 두 가지 지발중성자 source에 관한 간단한 표현(6.22)와 (6.23)을

amplitude식 (6.1a)에 대입하면

다음 두 식을 얻을 수 있다.

CDS 근사방정식 :

$$\dot{p} = \frac{-\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{\beta p_0}{\Lambda} + \frac{s(t)}{\Lambda} \quad (6.25)$$

PA 근사방정식 :

$$\dot{p} = \frac{-\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \left\{ \beta p_0 + \beta \bar{\lambda} \int_0^t [p(t') - p_0] dt' \right\} + \frac{s(t)}{\Lambda} \quad (6.26)$$

두 경우 모두, 선행핵붕괴는 정상상태에서의 붕괴율로 한정된다.

새로 생성된 선행핵들의 붕괴는 오직 지발중성자 source로서, 그리고 PA근사에서만 고려된다.

방정식에서 선행핵 붕괴를 설명함으로서 PA 근사를 논의할 필요성이 있다.

이러한 붕괴를 다루는 가장 간단한 모델은 "one-delay-group kinetics" 모델이다.

$$\dot{p}(t) = -\rho \frac{\beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \lambda \zeta + \frac{-s}{\Lambda} \quad (6.27a)$$

$$\zeta = -\lambda \zeta + \beta p \quad (6.27b)$$

여기서 6개 그룹을 1개 그룹으로 줄이기 위해 λ 와 ζ 를 적절하게 정의할 필요가 있다.

$$-\frac{d}{dt} \sum_k \zeta_k(t) = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t) \quad (6.28)$$

총 선행핵 수로서 정의된 ζ

$$\zeta(t) = \sum_k \zeta_k(t) \quad (6.29)$$

(6.28)과 (6.29)에서

$$\dot{\zeta}(t) = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t)$$

이 식의 좌변을 (6.27b)식의 좌변과 같다고 보면,

$$-\lambda \zeta + \beta p = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t)$$

여기서 $\beta p = \sum_k \beta_k p(t)$ 이므로

$$\lambda(t) = \frac{\sum_k \lambda_k \zeta_k(t)}{\sum_k \zeta_k(t)} \quad (6.30)$$

λ 는 보논바와 같이 시간의 함수로 나타나며 전체 방정식의 해에 의존하게 된다.

에너지 그룹을 다룰 때와 마찬가지로, λ 의 이러한 의존성은 최소한 어떤 영역에 대해서는

미약할 수가 있다. 예를 들어, 특정 스펙트럼이 거의 지배적인 inner core 영역에서 그룹 cross section은 공간에 독립적이라고 생각할 수 있다.

이러한 일이 λ 에 대해서도 비슷하게 일어나는지를 알아보기 위해 $\lambda(t)$ 를 짧은 시간 간격에 대해 계산해보자.

(6.2b) 식에서 $\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$ 이므로

$$\lambda(0) = \frac{\sum_k \lambda_k \zeta_{k0}}{\sum_k \zeta_{k0}} = \frac{\sum_k \beta_k}{\sum_k \lambda_k} = \left(\frac{-1}{\bar{\lambda}} \right)^{-1} = \bar{\lambda}^{in} \quad (6.31)$$

$\bar{\lambda}^{in}$ 은 "initial" one-decay-group λ 를 의미한다.

(6.2b) 식은 t=0 이전의 정상상태를 가정하고 있으므로

$\bar{\lambda}^{in}$ 는 정상상태에서 선행핵 전체의 평균 붕괴상수를 나타낸다.

$$\bar{\lambda}^{in} = \lambda_{stationary} \quad (6.32)$$

PA 근사에서 도입했던 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_k \beta_k \lambda_k$ (6.15) 와 $\bar{\lambda}^{in}$ 를 비교해보자.

$\overline{\lambda^{in}}$ 와 $\overline{\lambda}$ 의 numerical 값을 비교해보면 thermal reactor 뿐 아니라 fast reactor 에서도

많은 차이가 난다.

$\overline{\lambda}$ 값은 짧은 lifetime의 선행핵들이 가지는 큰 λ_k 값에 의해 영향을 받는다.

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\beta} (\beta_1 \lambda_1 + \dots + \beta_6 \lambda_6) \quad (6.33)$$

Table 2-II을 살펴보면 λ_6 는 λ_1 보다 약 300배 큰 값이므로 λ_6 가 $\overline{\lambda}$ 에 더 큰 영향을 미치게 된다.

반면 $\overline{\lambda^{in}}$ 의 경우,

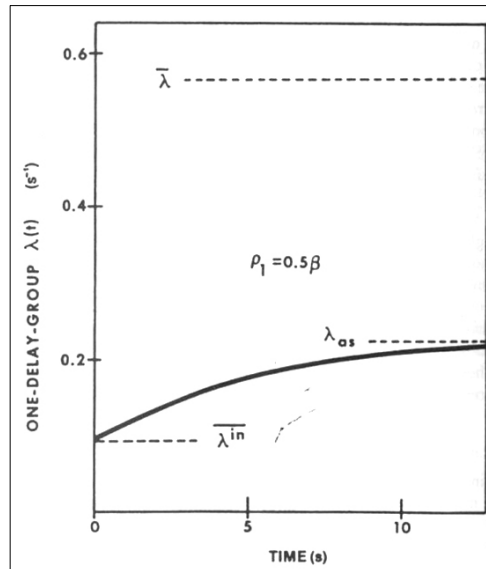
$$\frac{1}{\overline{\lambda^{in}}} = \overline{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\beta_6}{\lambda_6} \right) \quad (6.34)$$

위 식에서는 괄호 안의 λ_k 중 상대적으로 작은 값이 지배적인 역할을 하게 된다.

결과적으로 $\overline{\lambda^{in}}$ 이 $\overline{\lambda}$ 보다 훨씬 작은 값 일거라고 예측 할 수 있다.

$\overline{\lambda^{in}}$ 의 대표적인 값은 U^{235} 를 사용하는 열중성자로와 mixed-U-Pu 연료를 사용하는 고속로

모두에 대해 약 $0.08s^{-1}$ 정도이다. (6.24)의 값들과 비교해보면 6~8배 차이가 난다.



(그림 6-1)

그림 6-1은 $\rho_1 = 0.5\beta$ 의 반응도가 step 삽입되었을 때 (6.30)에 의해 정의된 $\lambda(t)$ 값을 나타낸 것이다.

$\lambda(t)$ 는 λ_{as} 를 점근선으로 하여 증가하고 있다. (λ_{as} 에 대해서는 6-1C를 참조)

one-delay-group 동역학 방정식은 시간에 의존적인 형태를 나타내며

(6.21)에서 제시된 $\overline{\lambda}$ 값과는 큰 차이를 보인다.

그 이유는 다음과 같다.

$\bar{\lambda}$ 는 짧은 시간 t 에 대해서 지발중성자 source의 표현을 근사시킨 것이다.

반면, 똑바른 요약(straightforward condensation)을 통해 one-delay-group λ 를 유도하게

되면 그것은 총 선행핵 수의 균형을 묘사하게 된다.

선행핵의 총 수는 그 자체만으로는 실질적으로 아무 의미가 없다. 중성자 flux가 가장 중요한

것이며, 선행핵은 오직 지발중성자 source의 형태로만 중성자 flux 방정식에 들어갈 수 있다.

그래서 지발중성자 source에 대한 적합한 근사를 통해 λ 의 one-delay-group 값을 얻는 것

이 좋으며, 반면 선행핵 총 수에 대한 표현에서 얻는 것은 좋지 않다.

(6.23)을 유도하는데 쓰이는 PA 근사보다 더 좋은 basis를 가지는 one-delay-group λ 의

정의를 내리기 위해서 지발중성자 source에 analytic 한 표현이 필요하다.

선행핵 balance 방정식,

$$\zeta(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \beta_k(t) \quad (6.35)$$

은 App. C의 과정을 통해 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\zeta_k(t) = \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.36)$$

따라서 선행핵의 전체 '수'와 지발중성자 source 는 다음과 같다.

$$\sum_k \zeta_k(t) = \sum_k \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \sum_k \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.37)$$

$$s_d(t) = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \sum_k \lambda_k \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.38)$$

exponential 함수를 전개한 다음 처음의 두 term만을 남기고, $\zeta_{k0} = -\frac{\beta_k p_0}{\lambda_k}$ 를 대입

하면,

$$\sum_k \zeta_k(t) = p_0 \left(\frac{\beta}{\lambda^{in}} - \beta t \right) + \beta \int_0^t p(t') dt' - \beta \bar{\lambda} p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.39)$$

$$s_d(t) = p_0 (\beta - \beta \bar{\lambda} t) + \beta \bar{\lambda} \int_0^t p(t') dt' - \beta \bar{\lambda}^2 p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.40)$$

$\bar{\lambda}^2$ 는 β_k weighted 된 λ_k^2 들의 평균이다. 즉, $\bar{\lambda}^2 = \frac{\sum_k \beta_k \lambda_k^2}{\sum_k \beta_k}$

여기에 대응되는 one-delay-group model의 표현은 다음과 같다.

$$\zeta(t) = p_0 \left(\frac{\beta}{\lambda} - \beta t \right) + \beta \int_0^t p(t') dt' - \beta \lambda p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.41)$$

$$s_d(t) = p_0 (\beta - \beta \lambda t) + \beta \lambda \int_0^t p(t') dt' - \beta \lambda^2 p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.42)$$

$$\text{with } p^{(1)}(t) = \int_0^t (t-t') p(t') dt' \quad (6.43)$$

(6.39)에서부터 (6.42)까지를 비교해보면 다음 두 가지 결론을 내릴 수 있다.

1. 만약 $\sum_k \zeta_k(t)$ 를 잘 기술하기 위해 one-delay-group λ 가 필요한 경우라면,

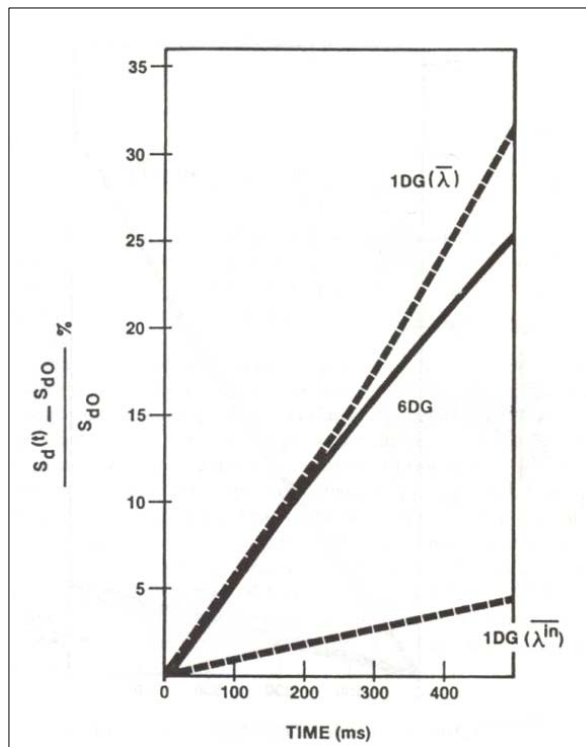
(6.39) 와 (6.41)을 비교하여

$$\lambda = \overline{\lambda^{in}} \quad (6.44)$$

2. 지발중성자 source를 잘 기술하기 위해 one-delay-group λ 가 필요한 경우라면,

(6.40) 과 (6.42)를 비교하여

$$\lambda = \overline{\lambda} \quad (6.45)$$



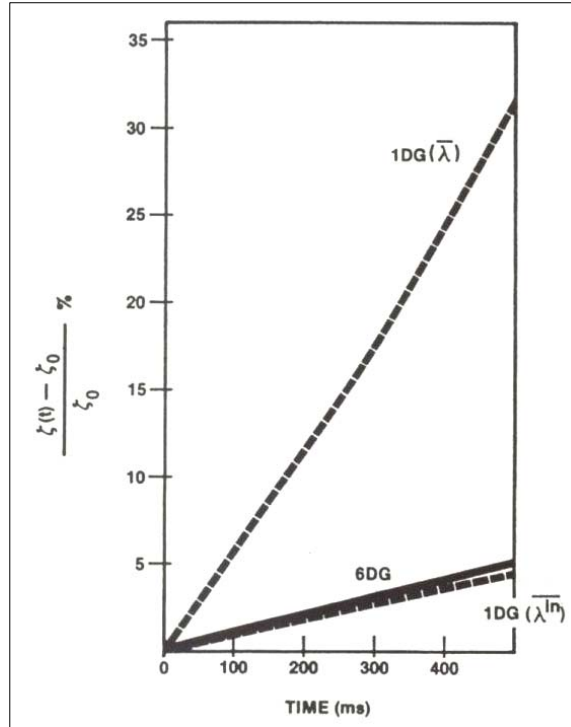
(그림 6-2a)

그림 6-2a 는 0.5\$ 의 step 반응도 삼입에 따른 one-delay-group 지발중성자 source의

증가량을 $\lambda = \overline{\lambda^{in}}$, $\lambda = \overline{\lambda}$ 두 경우로 나누어 6그룹의 정확한 결과와 비교한 것이다.

$\lambda = \bar{\lambda}$ 으로 두었을 때는 거의 200ms 까지 받아들일 수 있는 결과를 얻을 수 있지만,

$\lambda = \bar{\lambda}^{in}$ 인 경우 전체 시간 domain에 대해 완전히 틀린 결과가 나온다.



(그림 6-2b)

그림 6-2b에서 우리는 $\zeta(t)$ 를 기술하기 위해서는 one-delay-group 값으로서 $\lambda = \bar{\lambda}^{in}$ 를 선택하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다.

플럭스 amplitude 함수 $p(t)$ 와 reduced precursor $\zeta_k(t)$ 는 다음과 같이 expand 된다.

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots \quad (6.46)$$

$$\zeta_k(t) = \zeta_{k0} + \zeta_{k1} t + \zeta_{k2} t^2 + \dots \quad (6.47)$$

이 결과를 (6.27)에 대입하면,

$$\dot{p}(t) = -\frac{\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \lambda \zeta + \frac{s}{\Lambda} \quad (6.27a)$$

$$\dot{\zeta} = -\lambda \zeta + \beta p \quad (6.27b)$$

다음과 같다.

$$\zeta_{k1} = 0 \quad (6.48)$$

$$\zeta_{k2} = \frac{1}{2} \beta_k p_1 \quad (6.49)$$

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\Lambda} p_0 \quad (6.50)$$

$$p_2 = -\frac{\rho_1(\rho_1 - \beta)}{2\Lambda^2} p_0 \quad (6.51)$$

(6.50)에서 만약 Λ 가 아주 작다면 플럭스가 가파르게 증가할 것임을 알 수 있다.

예를 들어 $\rho_1 = 2 \times 10^{-3}$, $\Lambda = 4 \times 10^{-7}$ 인 경우 $(p_0 + p_1 t)$ 는 0.2ms 만에 두 배가 된다.

또한 (6.51)의 p_2 항의 분모인 Λ^2 역시 curvature를 크게 증가시킨다.

이렇게 계수의 분모에 위치한 Λ 들은 테일러 전개 of 수렴을 방해하는 역할을 한다.

이러한 발산 현상은 과도현상 과정의 어떤 point 에서도 나타날 수 있다.

그림 6-3에서는 exact한 one-delay-group 해와 2,3,4개 항의 테일러 전개 해와의 차이를

보여주고 있다.

이는 수치해석적 방법으로 동역학 문제에 접근하는 경우 만약 외삽이나 내삽이 테일러 전개에

기반을 두고 있다면 time step을 매우 짧게 할 필요성이 있다는 것을 시사한다.

