

Six

SOLUTION OF BASIC KINETICS PROBLEMS

대부분의 동역학 문제들은 다양한 지발중성자 그룹의 거동으로 인해 복잡한 해를 가지게 된다. 때문에, 주어진 문제에 대한 수치해(numerical solution)를 얻기 위해서는 컴퓨터 프로그램이 필요하다. 그러나 근사된 모델을 통한 해석해(analytical solution) 역시 매우 중요하다고 할 수 있다. 이러한 해석해가 basic kinetics parameter들 간의 관계를 밝히고 그로인해 도출된 결과를 이해하는데 도움을 주기 때문이다. 우리는 이러한 analytical relation을 통해 수치해를 점검해 볼 수도 있을 것이다.

어떤 문제를 해석적으로 다룸에 있어 그 결과를 쉽게 이해할 수 있도록 최대한 간단하게 제시한다. 어느 정도 간단하게 하느냐에 따라 아래의 두 가지 근사(approximation)중 하나 이상을 도입하게 된다.

1. 6개의 지발중성자 그룹을 하나의 'effective group'으로 근사 (Sec 6-1)

2. 고속로/경수로에서 중성자 generation time을 적절하게 작게 잡음으로서 kinetics equation 간략화

위의 두 가지 근사를 바탕으로 얻어진 결과는 모든 경수로나 고속로에 적용할 수 있다. 특히 두 번째 근사방법은 고속로에서 더 정확하는데 그 이유는 고속로의 neutron generation time 이 더 작기 때문이다.

어떻게 reactivity(반응도)를 구할 것인가 하는 것은 이러한 모델을 연구하는데 중요하지 않다. 그 결과는 상당히 일반적인 것이며, 원자로 구성의 변화 등으로 인한 반응도 변화를 계산하는데 적용되는 모델의 복잡성과는 독립적이다.

- β 와 Λ 의 시간 의존성은 무시되고 상수로 가정한다.
- 간단하게 하기위해 가장 중요한 class만 남긴다.
- $t \leq 0$ 에서 정상상태로 가정한다.

위 근사에 의해 이번 챕터에서 풀게 될 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{p}(t) = -\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} p(t) + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \xi_k(t) + \frac{1}{\Lambda} s(t) \quad (6.1a)$$

$$\dot{\xi}_k(t) = -\lambda_k \xi_k(t) + \beta_k p(t) \quad (6.1b)$$

$$\Lambda = \Lambda_k, \quad \beta = \beta_0 \text{ (constant)} \quad (6.1c)$$

또한, $F(t) = F_0$ (see 5.26a)

6-1. Kinetics for Small and Large Time Value

동역학 문제를 통해 간단하면서도 유용한 해를 얻으려면 지발중성자 source에 대한 보다 정확한

근사가 필요하다. 짧은 시간, 또는 긴 시간의 경과가 이에 미치는 영향을 살펴보자.

6-1A The Stationary Solution : Source Multiplication Formulas

Short time 에 대한 지발중성자 거동을 살펴보기에 앞서 우리는 정상상태 일점운동방정식을 통해

약간의 정보를 얻을 수 있다.

정상상태 운동방정식은 (6.1) 식의 시간 미분값을 0으로 놓고 λ 값을 소거하면 얻을 수 있다.

$$\dot{p} = 0 = (\rho_0 - \beta)p_0 + \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} + s_0 \quad (6.2a)$$

$$\zeta_k = 0 = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p_0 \quad (6.2b)$$

이때 (6.2a)에서 ρ_0 와 s_0 는 원자로가 임계일 때 0 이다.

위 식을 통해 우리는 ‘정상상태 해는 generation time (λ)에 독립적’이라는 것을 알 수 있다.

(6.2b) 식은 근사된 정상상태 선행핵 붕괴율(stationary decay rate)이 생성율과 같다는 것을

보여주고 있다. 즉,

$$\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$$

(6.2b)를 모든 지발중성자에 대해 더하면 임계/미임계 원자로의 stationary reduced 지발중성자에

대한 다음 형태를 얻을 수 있다.

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = \beta p_0 \quad (6.3)$$

(3.47)에서

$$\lambda_k \zeta(t) = \lambda_k \frac{\widehat{C}_k(t)}{\widehat{S}_0} \text{ 이므로 } (\widehat{S}_0 \text{ 는 초기 핵분열 중성자의 total source} = \nu \Sigma_f \widehat{\phi}_0)$$

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \frac{\widehat{C}_{k0}}{\widehat{S}_0} = -\frac{\widehat{S}_{d0}}{\widehat{S}_0} \quad (6.4)$$

$p_0 = 1$ ($\leftarrow \phi_0 = \phi_0$) 로 놓으면, (6.3)과 (6.4)에서

$$\widehat{S}_{d0} = \beta \widehat{S}_0 \quad (6.5)$$

따라서 stationary integrated 지발중성자 source 는 β 와 integrated total 핵분열중성자 source의 곱으로 나타난다.

미임계 원자로에서 (6.3)을 (6.2a)에 대입하면,

$$0 = \rho_0 p_0 + s_0 \quad (6.6)$$

(3.48)에서 $t=0$ 일때

$$s(t) = -\frac{\widehat{S}(t)}{\widehat{S}_0} \quad (s(t) : \text{relative independent source (3.48)})$$

$$\rightarrow s_0 = -\frac{\widehat{S}_0}{\widehat{S}_0} \quad (6.7)$$

$p_0 = 1$ 이므로 (6.6)과 (6.7)에서

$$\widehat{S}_0 = \frac{1}{-\rho_0} \widehat{S}_0 \quad (6.8a)$$

$\frac{1}{-\rho_0}$ 를 'source multiplication factor' 라 한다.

(이러한 source multiplication formula들은 앞으로 많이 등장하게 된다.)

static source multiplication factor를 구해보자

위 식의 양변에 \widehat{S}_0 를 더하고 $k_0 (= \frac{1}{1-\rho_0})$ 을 도입하면,

$$\widehat{S}_0 + \widehat{S}_0 = \widehat{S}_{tot,0} = \frac{\widehat{S}_0}{1-k_0} = \frac{\widehat{S}_0}{-\Delta k_0} \quad (6.8b)$$

(6.6)을 p 에 대해 바로 풀면

$$p_0 = \frac{s_0}{-\rho_0} \quad (6.8c)$$

만약 adjoint weighting을 적용한다면 source, ρ_0 , ξ_0 등은 다르게 정의되어야 할 것이다.

adjoint weighted 된 source multiplication formula 는 식(6.8)의 weighting 되지 않은 식보다

정확하다고 할 수 있다.

static adjoint weighted source multiplication formula 는 다음과 같다.

(6.8a)에서 $S_0 = F_0 \phi_0$ 이고, 양변에 adjoint flux를 곱하고 적분하면,

$$(\Phi_0^*, F_0 \Phi_0) = -\frac{1}{\rho_0} (\Phi_0^*, S_0) \quad (6.9a)$$

(6.8b)에서

$$(\Phi_0^*, [F_0 \Phi_0 + S_0]) = -\frac{1}{\Delta k_0} (\Phi_0^*, S_0) \quad (6.9b)$$

그리고 (6.7)과 (6.8c)에서

$$\rho_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{(\Phi_0^*, S_0)}{(\Phi_0^*, F_0 \Psi_0)} \quad (6.9c)$$

임계 원자로에서, $\rho_0 = s_0 = 0$ 이다.

(6.2a)에서

$$0 = -\beta \rho_0 + \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = -\beta \rho_0 + s_{d0} \quad \text{이므로}$$

$$\rho_0 = -\frac{s_{d0}}{\beta} \quad (6.11)$$

여기서 source multiplication factor는 $\frac{1}{\beta}$ 로 주어진다.

β 는 이 식에서 negative reactivity 역할을 하게 된다.

(6.11)식은 매우 중요한 사실을 시사한다.

즉, 지발중성자 source 가 유한한 플럭스 레벨을 유지시킴으로 인해 임계원자로는 미임계원자로

처럼 보일 수 있다는 것이다.

이 식의 물리적인 고찰은 7-1에서 이루어질 것이다.

또 다른 source multiplication formula 는 미임계 원자로에 대해 (6.2a) 식에서 얻어진다. ($S_0 > 0$)

$$\rho_0 = -\frac{s_0 + s_{d0}}{\beta - \rho_0} \quad (6.12)$$

즉, 미임계 정상상태의 flux amplitude(ρ_0) 는 independent source 와 delayed source 의 합으로

나타나며, 이때 source multiplication factor 는 reactivity 증가에 의해 결정된다.

6-1B Kinetics for Small Time Values

짧은 시간 변화에 대한 동역학적 변화를 살펴봄으로써 우리는 과도현상의 시작과 (onset of

transients) 지발중성자 그룹의 근사에 대해 알 수 있다.

비록 제어봉 삽입이나 냉각수 비등과 같은 갑작스러운 반응도 변화라도 실질적으로는 연속적인

현상이지만, 개략적으로 살펴볼 때에 한해 우리는 "steps" "ramps" 를 가정한다.

초기 임계상태인 경우 다음과 같다.

$$\text{reactivity step : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \rho_1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (6.13a)$$

$$\text{reactivity ramp : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ at & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (a : \text{reactivity insertion rate})(6.13b)$$

이 둘을 합치면 "limited ramp" 또는 "terminated ramp" 라고 한다.

$$\text{limited reactivity ramp : } \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ at & \text{for } 0 \leq t \leq t_1 \\ \rho_1 & \text{for } t \geq t_1 \end{cases} \quad (6.13c)$$

중성자 플럭스뿐 아니라 지발중성자 source 도 초기임계 원자로에 대한 즉각적인 반응도 step 삽입을 따라가지는 않을 것이다.

반응도에 의해 즉각적으로 변화하는 값은 \dot{p} 뿐이다.

$$\dot{p}(0) = -\frac{\rho_1 - \beta}{\Lambda} p_0 + \frac{1}{\Lambda} \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = -\frac{\rho_1}{\Lambda} p_0 \quad (6.14)$$

$$\dot{\zeta}_k(0) = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p_0 = 0 \quad (6.15)$$

(6.14)식의 우변이 step change 하면 \dot{p} 도 step change 한다.

따라서 $p(t)$ 는 t=0에서 선형적으로 변화한다.

그에 비해 $\zeta_k(t)$ 는 t=0에서 0의 기울기를 가진다.

t=0에서 p 와 ζ 의 기울기를 이용해 짧은 시간 간격에 있어 지발중성자 source에 대한

다음 두 가지 근사가 가능하다.

1. 상수 지발중성자 source (CDS : constant delayed neutron source) 근사 :

$$s_d(t) = s_{d0} \quad (6.16)$$

2. 선행핵 축적 근사 (PA : precursor accumulation approximation) :

ζ 가 p 보다 훨씬 천천히 시작되기 때문에 선행핵 균형식에서 $\zeta_k = \zeta_{k0}$ 라고

놓고

$p(t)$ 는 시간에 따라 변화하도록 할 수 있다.

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_{k0} + \beta_k p(t) \quad (6.17)$$

만약 $p(t)$ 가 시간에 따라 증가한다면, 위 근사는 다음과 같이 해석할 수 있을 것이다. :

‘새롭게 생성된 선행핵들은 축적되고 지발중성자 source에 기여한다.’

그러나 시간 t에서 붕괴되는 부분은 아직도 무시할 만큼 작다.

$\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$ 라고 하면, (6.17)에서

$$\dot{\zeta}_k(t) = \beta_k (p(t) - p_0) \quad (6.18)$$

따라서 지발중성자 source 는 다음과 같다.

$$s_d(t) = s_{d0} + \sum_k \beta_k \lambda_k I(t) \quad (6.19)$$

$$I(t) = \int_0^t [p(t') - p_0] dt' \quad (6.20)$$

(6.19) 식에 다음을 도입한다.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_k \beta_k \lambda_k \quad (6.21)$$

(6.3)과 (6.21)에서 두개의 short time 근사는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$s_{d0} = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} = \beta p_0 \quad (6.3)$$

· CDS 근사 : 지발중성자원을 상수로 보는 것이므로

$$s_d(t) = \beta p_0 \quad (6.22)$$

· PA 근사 :

$$(6.21)에서 \quad \beta \bar{\lambda} = \sum_k \beta_k \lambda_k \quad \text{이고}$$

(6.3)에서 $s_{d0} = \beta p_0$ 이므로 (6.19)에 대입하면,

$$s_d(t) = \beta p_0 + \beta \bar{\lambda} I(t) \quad (6.23)$$

이처럼 CDS 근사에서 지발중성자 data는 total β 값으로만 나타나며,

PA 근사에서는 $\beta_k \lambda_k$ 값을 더한 $\bar{\lambda}$ 가 나타난다.

따라서, PA 근사에서 새롭게 생성된 선행핵의 붕괴는 지발중성자 source를 증가시킨다.

$\bar{\lambda}$ 의 대표적인 값은

$$\bar{\lambda} \approx 0.4s^{-1} \quad \text{for } U^{235} \text{ fueled thermal reactors} \quad (6.24a)$$

$$\bar{\lambda} \approx 0.6s^{-1} \quad \text{for large mixed-oxide-fueled fast reactors} \quad (6.24b)$$

위 두 가지 지발중성자 source에 관한 간단한 표현(6.22)와 (6.23)을

amplitude식 (6.1a)에 대입하면

다음 두 식을 얻을 수 있다.

CDS 근사방정식 :

$$\dot{p} = \frac{-\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{\beta p_0}{\Lambda} + \frac{s(t)}{\Lambda} \quad (6.25)$$

PA 근사방정식 :

$$\dot{p} = \frac{-\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \left\{ \beta p_0 + \beta \bar{\lambda} \int_0^t [p(t') - p_0] dt' \right\} + \frac{s(t)}{\Lambda} \quad (6.26)$$

두 경우 모두, 선행핵붕괴는 정상상태에서의 붕괴율로 한정된다.

새로 생성된 선행핵들의 붕괴는 오직 지발중성자 source로서, 그리고 PA근사에서만 고려된다.

방정식에서 선행핵 붕괴를 설명함으로서 PA 근사를 논의할 필요성이 있다.

이러한 붕괴를 다루는 가장 간단한 모델은 "one-delay-group kinetics" 모델이다.

$$\dot{p}(t) = -\rho - \beta p + \frac{1}{\Lambda} \lambda \zeta + \frac{s}{\Lambda} \quad (6.27a)$$

$$\zeta = -\lambda \zeta + \beta p \quad (6.27b)$$

여기서 6개 그룹을 1개 그룹으로 줄이기 위해 λ 와 ζ 를 적절하게 정의할 필요가 있다.

$$-\frac{d}{dt} \sum_k \zeta_k(t) = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t) \quad (6.28)$$

총 선행핵 수로서 정의된 ζ

$$\zeta(t) = \sum_k \zeta_k(t) \quad (6.29)$$

(6.28)과 (6.29)에서

$$\dot{\zeta}(t) = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t)$$

이 식의 좌변을 (6.27b)식의 좌변과 같다고 보면,

$$-\lambda \zeta + \beta p = -\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) + \sum_k \beta_k p(t)$$

여기서 $\beta p = \sum_k \beta_k p(t)$ 이므로

$$\lambda(t) = \frac{\sum_k \lambda_k \zeta_k(t)}{\sum_k \zeta_k(t)} \quad (6.30)$$

λ 는 보논바와 같이 시간의 함수로 나타나며 전체 방정식의 해에 의존하게 된다.

에너지 그룹을 다룰 때와 마찬가지로, λ 의 이러한 의존성은 최소한 어떤 영역에 대해서는

미약할 수가 있다. 예를 들어, 특정 스펙트럼이 거의 지배적인 inner core 영역에서 그룹 cross section은 공간에 독립적이라고 생각할 수 있다.

이러한 일이 λ 에 대해서도 비슷하게 일어나는지를 알아보기 위해 $\lambda(t)$ 를 짧은 시간 간격에 대해 계산해보자.

(6.2b) 식에서 $\lambda_k \zeta_{k0} = \beta_k p_0$ 이므로

$$\lambda(0) = \frac{\sum_k \lambda_k \zeta_{k0}}{\sum_k \zeta_{k0}} = \frac{\sum_k \beta_k}{\sum_k \lambda_k} = \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}} \right)^{-1} = \bar{\lambda}^{in} \quad (6.31)$$

$\bar{\lambda}^{in}$ 은 "initial" one-decay-group λ 를 의미한다.

(6.2b) 식은 t=0 이전의 정상상태를 가정하고 있으므로

$\bar{\lambda}^{in}$ 는 정상상태에서 선행핵 전체의 평균 붕괴상수를 나타낸다.

$$\bar{\lambda}^{in} = \lambda_{stationary} \quad (6.32)$$

PA 근사에서 도입했던 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_k \beta_k \lambda_k$ (6.15) 와 $\bar{\lambda}^{in}$ 를 비교해보자.

$\overline{\lambda^{in}}$ 와 $\overline{\lambda}$ 의 numerical 값을 비교해보면 thermal reactor 뿐 아니라 fast reactor 에서도

많은 차이가 난다.

$\overline{\lambda}$ 값은 짧은 lifetime의 선행핵들이 가지는 큰 λ_k 값에 의해 영향을 받는다.

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\beta} (\beta_1 \lambda_1 + \dots + \beta_6 \lambda_6) \quad (6.33)$$

Table 2-II을 살펴보면 λ_6 는 λ_1 보다 약 300배 큰 값이므로 λ_6 가 $\overline{\lambda}$ 에 더 큰 영향을 미치게 된다.

반면 $\overline{\lambda^{in}}$ 의 경우,

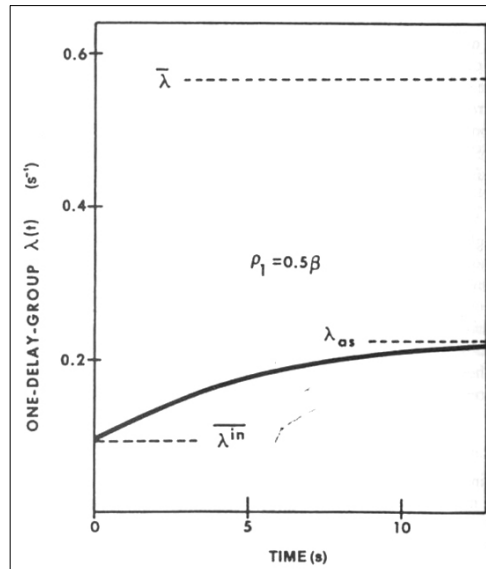
$$\frac{1}{\overline{\lambda^{in}}} = \overline{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\beta_6}{\lambda_6} \right) \quad (6.34)$$

위 식에서는 괄호 안의 λ_k 중 상대적으로 작은 값이 지배적인 역할을 하게 된다.

결과적으로 $\overline{\lambda^{in}}$ 이 $\overline{\lambda}$ 보다 훨씬 작은 값 일거라고 예측 할 수 있다.

$\overline{\lambda^{in}}$ 의 대표적인 값은 U^{235} 를 사용하는 열중성자로와 mixed-U-Pu 연료를 사용하는 고속로

모두에 대해 약 $0.08s^{-1}$ 정도이다. (6.24)의 값들과 비교해보면 6~8배 차이가 난다.



(그림 6-1)

그림 6-1은 $\rho_1 = 0.5\beta$ 의 반응도가 step 삽입되었을 때 (6.30)에 의해 정의된 $\lambda(t)$ 값을 나타낸 것이다.

$\lambda(t)$ 는 λ_{as} 를 점근선으로 하여 증가하고 있다. (λ_{as} 에 대해서는 6-1C를 참조)

one-delay-group 동역학 방정식은 시간에 의존적인 형태를 나타내며

(6.21)에서 제시된 $\overline{\lambda}$ 값과는 큰 차이를 보인다.

그 이유는 다음과 같다.

$\bar{\lambda}$ 는 짧은 시간 t 에 대해서 지발중성자 source의 표현을 근사시킨 것이다.

반면, 똑바른 요약(straightforward condensation)을 통해 one-delay-group λ 를 유도하게

되면 그것은 총 선행핵 수의 균형을 묘사하게 된다.

선행핵의 총 수는 그 자체만으로는 실질적으로 아무 의미가 없다. 중성자 flux가 가장 중요한

것이며, 선행핵은 오직 지발중성자 source의 형태로만 중성자 flux 방정식에 들어갈 수 있다.

그래서 지발중성자 source에 대한 적합한 근사를 통해 λ 의 one-delay-group 값을 얻는 것

이 좋으며, 반면 선행핵 총 수에 대한 표현에서 얻는 것은 좋지 않다.

(6.23)을 유도하는데 쓰이는 PA 근사보다 더 좋은 basis를 가지는 one-delay-group λ 의

정의를 내리기 위해서 지발중성자 source에 analytic 한 표현이 필요하다.

선행핵 balance 방정식,

$$\zeta(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \beta_k(t) \quad (6.35)$$

은 App. C의 과정을 통해 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\zeta_k(t) = \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.36)$$

따라서 선행핵의 전체 '수'와 지발중성자 source 는 다음과 같다.

$$\sum_k \zeta_k(t) = \sum_k \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \sum_k \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.37)$$

$$s_d(t) = \sum_k \lambda_k \zeta_{k0} \exp(-\lambda_k t) + \sum_k \lambda_k \beta_k \int_0^t \exp[-\lambda_k(t-t')] p(t') dt' \quad (6.38)$$

exponential 함수를 전개한 다음 처음의 두 term만을 남기고, $\zeta_{k0} = -\frac{\beta_k p_0}{\lambda_k}$ 를 대입

하면,

$$\sum_k \zeta_k(t) = p_0 \left(\frac{\beta}{\lambda^{in}} - \beta t \right) + \beta \int_0^t p(t') dt' - \beta \bar{\lambda} p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.39)$$

$$s_d(t) = p_0 (\beta - \beta \bar{\lambda} t) + \beta \bar{\lambda} \int_0^t p(t') dt' - \beta \bar{\lambda}^2 p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.40)$$

$\bar{\lambda}^2$ 는 β_k weighted 된 λ_k^2 들의 평균이다. 즉, $\bar{\lambda}^2 = \frac{\sum_k \beta_k \lambda_k^2}{\sum_k \beta_k}$

여기에 대응되는 one-delay-group model의 표현은 다음과 같다.

$$\zeta(t) = p_0 \left(\frac{\beta}{\lambda} - \beta t \right) + \beta \int_0^t p(t') dt' - \beta \lambda p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.41)$$

$$s_d(t) = p_0 (\beta - \beta \lambda t) + \beta \lambda \int_0^t p(t') dt' - \beta \lambda^2 p^{(1)}(t) + \dots \quad (6.42)$$

$$\text{with } p^{(1)}(t) = \int_0^t (t-t') p(t') dt' \quad (6.43)$$

(6.39)에서부터 (6.42)까지를 비교해보면 다음 두 가지 결론을 내릴 수 있다.

1. 만약 $\sum_k \zeta_k(t)$ 를 잘 기술하기 위해 one-delay-group λ 가 필요한 경우라면,

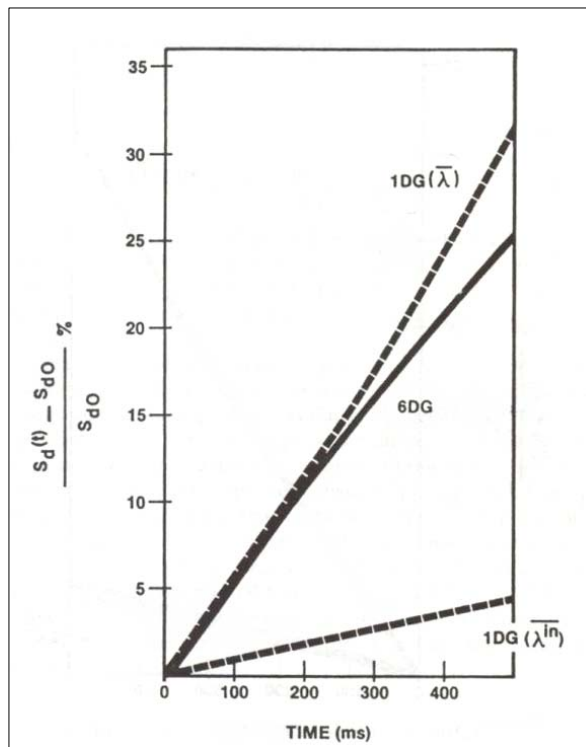
(6.39) 와 (6.41)을 비교하여

$$\lambda = \overline{\lambda^{in}} \quad (6.44)$$

2. 지발중성자 source를 잘 기술하기 위해 one-delay-group λ 가 필요한 경우라면,

(6.40) 과 (6.42)를 비교하여

$$\lambda = \overline{\lambda} \quad (6.45)$$



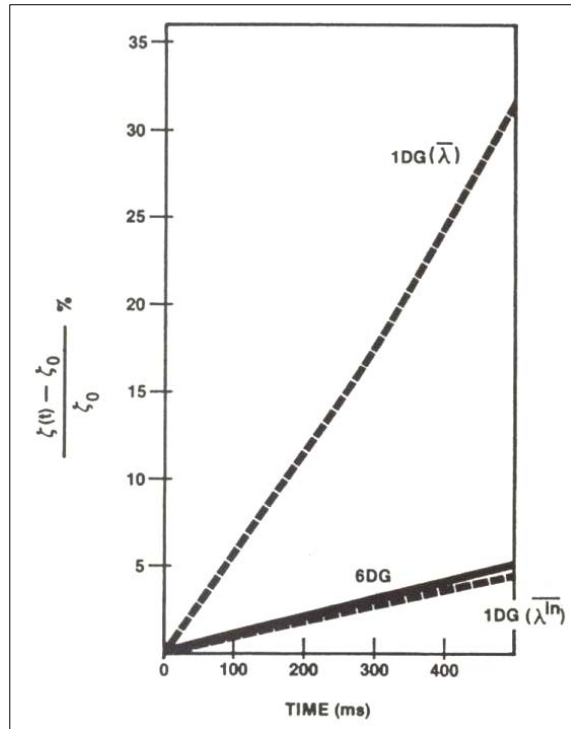
(그림 6-2a)

그림 6-2a 는 0.5\$ 의 step 반응도 삼입에 따른 one-delay-group 지발중성자 source의

증가량을 $\lambda = \overline{\lambda^{in}}$, $\lambda = \overline{\lambda}$ 두 경우로 나누어 6그룹의 정확한 결과와 비교한 것이다.

$\lambda = \bar{\lambda}$ 으로 두었을 때는 거의 200ms 까지 받아들일 수 있는 결과를 얻을 수 있지만,

$\lambda = \bar{\lambda}^{in}$ 인 경우 전체 시간 domain에 대해 완전히 틀린 결과가 나온다.



(그림 6-2b)

그림 6-2b에서 우리는 $\zeta(t)$ 를 기술하기 위해서는 one-delay-group 값으로서 $\lambda = \bar{\lambda}^{in}$ 를 선택하는 것이 필요하다는 것을 알 수 있다.

플럭스 amplitude 함수 $p(t)$ 와 reduced precursor $\zeta_k(t)$ 는 다음과 같이 expand 된다.

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots \quad (6.46)$$

$$\zeta_k(t) = \zeta_{k0} + \zeta_{k1} t + \zeta_{k2} t^2 + \dots \quad (6.47)$$

이 결과를 (6.27)에 대입하면,

$$\dot{p}(t) = -\frac{\rho - \beta}{\Lambda} p + \frac{1}{\Lambda} \lambda \zeta + \frac{s}{\Lambda} \quad (6.27a)$$

$$\dot{\zeta} = -\lambda \zeta + \beta p \quad (6.27b)$$

다음과 같다.

$$\zeta_{k1} = 0 \quad (6.48)$$

$$\zeta_{k2} = \frac{1}{2} \beta_k p_1 \quad (6.49)$$

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\Lambda} p_0 \quad (6.50)$$

$$p_2 = -\frac{\rho_1(\rho_1 - \beta)}{2\Lambda^2} p_0 \quad (6.51)$$

(6.50)에서 만약 Λ 가 아주 작다면 플럭스가 가파르게 증가할 것임을 알 수 있다.

예를 들어 $\rho_1 = 2 \times 10^{-3}$, $\Lambda = 4 \times 10^{-7}$ 인 경우 $(p_0 + p_1 t)$ 는 0.2ms 만에 두 배가 된다.

또한 (6.51)의 p_2 항의 분모인 Λ^2 역시 curvature를 크게 증가시킨다.

이렇게 계수의 분모에 위치한 Λ 들은 테일러 전개 of 수렴을 방해하는 역할을 한다.

이러한 발산 현상은 과도현상 과정의 어떤 point 에서도 나타날 수 있다.

그림 6-3에서는 exact한 one-delay-group 해와 2,3,4개 항의 테일러 전개 해와의 차이를

보여주고 있다.

이는 수치해석적 방법으로 동역학 문제에 접근하는 경우 만약 외삽이나 내삽이 테일러 전개에

기반을 두고 있다면 time step을 매우 짧게 할 필요성이 있다는 것을 시사한다.

