Five

THE POINT KINETICS EQUATIONS

5-1C Derivation of the Exact Point Kinetics Equations for an Initially Subcritical Reactor

임계상태	미임계상태
$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbb{F}_p - \mathbb{M})\Phi + S_d$ (5.11)	$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbb{F}_p - \mathbb{M})\Phi + S_d + S$ (5.36) ▻초기에 어떠한 크기의 중성자속이 일정하게 유지되고 있으려면, 외부에서 중성자를 공급해주어야만 한다.(homogeneous가 아니게 된다.) $S = S(\vec{r}, E, t)$ (5.37)
$0 = (\mathbb{F}_{p0} - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_{d0}$ (5.12)	$0 = (\mathbb{F}_{p0} - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_{d0} + S_0$ (5.38)
$0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)\Phi_0$ (5.14)	$0 = (\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0)\Phi_0 + S_0$ (5.39)

▻초기 상태가 미임계인 원자로의 exact point kinetics equation은 초기가 임계(chapter 5-1B)인 원자로와 구하는 과정이 같다. 다만 weighting function이 다를 뿐이다.

▻Initially subcritical의 adjoint는 initially critical과 달리 유일하지 않다.

/(참고)
An adjoint function for a subcritical system is introduced as the solution of the following inhomogeneous problem.

$$(\mathbb{M}_0^* - \mathbb{F}_0^*)\Phi_{\det}^* = \Sigma_{\det}(\vec{r}, E) \qquad (5.40)$$

단, $\Sigma_{\det}(\vec{r}, E)$: the macroscopic neutron capture of fission cross section of a neutron detector

$\Phi_{\det}^*$: the flux response to the injection of source neutrons measured by the special detector, which is characterized by $\Sigma_{\det}(\vec{r}, E)$ /

두 개의 다른 adjoint problem이 사용된다.

①$(\mathbb{M}_0^* - \lambda_0 \mathbb{F}_0^*)\Phi_{\lambda 0}^* = 0$ (5.41)

②$(\mathbb{M}_0^* - \mathbb{F}_0^* + \frac{\alpha_0}{v})\Phi_{\alpha 0}^* = 0$ (5.42)

Equations ①: initial adjoint λ mode

②: initial adjoint α mode

(See Sec. 11-4A) 그러나 대개 $\Phi^*_{\lambda 0}$가 $\Phi^*_{\alpha 0}$보다 더 정확히 예측한다.

$$0=(\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0)\Phi_0+S_0 \quad (5.39) \quad \xrightarrow{convert} \quad 0=(\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0+\mathbb{S}_0)\Phi_0 \tag{5.43}$$

$$\text{단, } \mathbb{S}_0\Phi_0=S_0(\vec{r},E) \tag{5.44}$$

(균일하지 않은 상태→균일한 상태로 바꾸는 과정)

$$0=(\mathbb{F}_0^*-\mathbb{M}_0^*+\mathbb{S}_0^*)\Phi^*_{h0} \tag{5.45}$$

식 (5.44)는 unique해서 식 (5.43)의 결과에 영향을 끼치지 않지만, $\mathbb{S}_0$는 unique하지 않기 때문에 서로 다른 $\mathbb{S}_0$는 서로 다른 Φ^*_{h0}를 유도한다.

초기 상태가 미임계인 시스템은 초기 상태가 임계인 시스템의 경우와 같은 방법으로 운동 방정식을 구할 수 있다.

임계 원자로 $$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_0^*,\frac{1}{v}\Phi)=(\Phi_0^*,[\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Phi)-(\Phi_0^*,\mathbb{F}_d\Phi)+(\Phi_0^*,S_d) \tag{5.18}$$

미임계 원자로 $$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi^*_{\lambda 0},\frac{1}{v}\Phi)=(\Phi^*_{\lambda 0},[\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Phi)-(\Phi^*_{\lambda 0},\mathbb{F}_d\Phi)+(\Phi^*_{\lambda 0},S_d)+(\Phi^*_{\lambda 0},S) \tag{5.46}$$

식 (5.46)는 초기 원자로가 임계가 될 때 식 (5.18)로 근접할 것이다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi^*_{\lambda 0},\frac{1}{v}\Phi)=(\Phi^*_{\lambda 0},[\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Phi)-(\Phi^*_{\lambda 0},\mathbb{F}_d\Phi)+(\Phi^*_{\lambda 0},S_d)+(\Phi^*_{\lambda 0},S)\xrightarrow{inserting}$$

$$\phi(\vec{r},E,t)=p(t)\cdot\psi(\vec{r},E,t)$$

강제조건을 사용하면,

$$\int_V\int_E\frac{\phi^*_{\lambda 0}(\vec{r},E)\psi(\vec{r},E,t)}{v(E)}dE\,dV=K_0 \tag{5.47}$$

그리고 다음 변수로 양변을 나누어주면,

$$F_\lambda(t)=(\Phi^*_{\lambda 0},\mathbb{F}\Psi) \tag{5.48}$$

초기 상태가 미임계 원자로의 경우 결과적으로 다음과 같이 된다.

$$\therefore \dot{p}(t)=\frac{\rho(t)-\beta(t)}{\Lambda(t)}p(t)+\frac{1}{\Lambda_0}\sum_k\lambda_k\zeta_k(t)+\frac{s(t)}{\Lambda(t)} \tag{5.49a}$$

$$\dot{\zeta}_k(t)=-\lambda_k\zeta_k(t)+\frac{F_\lambda(t)}{F_{\lambda 0}}\beta_k(t)p(t) \tag{5.49b}$$

cf)임계 원자로의 경우

$$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t)-\beta(t)}{\Lambda(t)}p(t) + \frac{1}{\Lambda_0}\sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \qquad (5.34a)$$

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \frac{F(t)}{F_0}\beta_k(t)p(t) \qquad (5.34b)$$

정의:

$$s(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi^*_{\lambda 0}, S) \qquad (5.50)$$

초기 상태가 미임계인 시스템의 운동방정식으로 구한 시간에 의존하는 반응도는 exact static의 반응도와 같은 형태로 주어진다.

$$\rho(t) = \frac{(\Phi^*_{\lambda 0}, [\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi)}{(\Phi^*_{\lambda 0}, \mathbb{F}\Psi)} \qquad (5.51)$$

$$\rho(0) = \frac{(\Phi^*_{\lambda 0}, [\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0]\Psi_0)}{(\Phi^*_{\lambda 0}, \mathbb{F}_0\Psi_0)} = \frac{(\Psi_0, [\mathbb{F}^*_0-\mathbb{M}^*_0]\Phi^*_{\lambda 0})}{(\Psi_0, \mathbb{F}^*_0\Phi^*_{\lambda 0})} = \rho_0 = \rho^{st}_0 \qquad (5.52)$$

$\rho(t)$와 초기 static reactivity ρ_0의 차이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0 \Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi) \qquad (5.53a)$$

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \qquad (5.53b)$$

$$\rho_0 = 1-\lambda_0 = \rho^{st}_0 \qquad (5.53c)$$

Eq. (5.53)을 증명하면.

$$\begin{aligned}\delta\rho(t)\cdot F_\lambda(t) &= (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\Delta\mathbb{F}-\Delta\mathbb{M}]\Psi) = (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F}-\mathbb{M}-(\lambda_0\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0)]\Psi) \\ &= (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi) = (\Phi^*_{\lambda 0}, [(1-\rho_0)\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi) \\ &= (\Phi^*_{\lambda 0}, [\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi) - \rho_0(\Phi^*_{\lambda 0}, \mathbb{F}\Psi) = [\rho(t)-\rho_0]F_\lambda(t)\end{aligned} \qquad (5.54)$$

5-1D Reactivity in the Exact Point Kinetics Equations

* One dollar (1$=100cents) [reactivity units]
: a reactivity or a reactivity increment in the amount of β

$\beta(t) = \frac{1}{F(t)}(\Phi^*_0, F_d\Psi)$; β는 t의 함수이지만 종종 $\beta(t) = \beta_0$로 놓는다.

* exact kinetics equation에서 나타난 반응도($\rho^{dyn}(t) = \frac{1}{F(t)}(\Phi^*_0, [\Delta\mathbb{F}-\Delta\mathbb{M}]\Psi)$)를

"dynamic reactivity"라 부른다. ρ^{dyn}는 시간에 의존하는 중성자속($\phi(\vec{r},E,t)$)으로 형성된데 반해 ρ^{st}는 perturbed system의 λ 모드 중성자속($\Phi_\lambda(\vec{r},E)$)으로 형성되었다.

* 만약 exact point kinetics equation에 사용한 flux와 adjoint flux가 부정확하다면 그에 따라 결과로 구한 반응도도 부정확할 것이다.(부정확하다면, zero-order term이 가장 많이 기여할 것이다.) 반응도의 오차를 제거하기 위해서는 $\rho^{dyn}(t)=\dfrac{1}{F(t)}(\Phi_0^*,[\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi)$보다 $\rho^{dyn}(t)=\dfrac{1}{F(t)}(\Phi_0^*,[\Delta\mathbb{F}-\Delta\mathbb{M}]\Psi)$로서 반응도를 구하여야 한다.(zero-order를 사용하기 보다는 first-order 자체로 구하는 것이 오차가 적다.⇒chapter 11)

* 반응도를 일정하게 하는 것은 dynamic의 경우가 static인 경우보다 중요하다.
* Chapter 5-1C에서 보듯 사실 외부 소스가 주어지는 미임계 상태의 원자로의 초기 조건은 균일하지 않다. 다시 말해 exact static reactivity 식에서와 같은 개념으로 초기 adjoint flux가 사용될 수 없다.

* Eq. (5.53b)에서 반응도는 두 개의 항으로 나눠진다.

$$\rho(t)=\rho_0+\delta\rho(t) \tag{5.55a}$$

Weighting function으로서 $\Phi_{\lambda0}^*$가 사용되므로 초기 반응도 ρ_0는 static 상태의 반응도와 같아진다.

$$\rho_0=\rho_0^{st} \tag{5.55b}$$

$$\delta\rho(t)=\frac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi) \tag{5.56}$$

식(5.56)의 분자는 다음의 조건으로 인하여 0차, 1차, 2차 항으로 나눠질 수 있다. $\Delta\mathbb{F}=\mathbb{F}-\mathbb{F}_0$, $\Delta\mathbb{M}=\mathbb{M}-\mathbb{M}_0$ 그리고, ψ또한 같은 개념으로 분해해 보면 다음과 같아진다.

$$\psi(\vec{r},E,t)=\psi_0(\vec{r},E)+\Delta\psi(\vec{r},E,t) \tag{5.57}$$

식 (5.57)을 다음 식에 대입 $\delta\rho(t)=\dfrac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}-\mathbb{M}]\Psi)$ (5.56)

$$\begin{aligned}\xrightarrow{result}\delta\rho(t)=\frac{1}{F_\lambda(t)}\{&(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0]\Psi_0)+(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\Delta\mathbb{F}-\Delta\mathbb{M}]\Psi_0)\\&+(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0]\Delta\Psi)+(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\Delta\mathbb{F}-\Delta\mathbb{M}]\Delta\Psi)\}\end{aligned} \tag{5.58}$$

$\Phi_{\lambda0}^*$가 다음 조건을 만족하므로

$$\int_V\int_E\frac{\phi_{\lambda0}^*(\vec{r},E)\psi(\vec{r},E,t)}{v(E)}dE\,dV=K_0$$

$$(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0]\Psi_0)=0\,\text{and}\,(\Phi_{\lambda0}^*,[\lambda_0\mathbb{F}_0-\mathbb{M}_0]\Delta\Psi)=0$$

$(\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0 \Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Delta\Psi)$ [This term contains differences in operators and in the flux shape. Both of these differences are initially zero and develop after the onset of the transient.]

$\therefore$ 반응도, $\delta\rho(t) = \dfrac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi)$는 만약 Ψ_0가 초기 중성자속의 형태와 같다면 초기 상태가 임계인 원자로에서 구한 식과 같아진다.

First-order perturbation theory에서 Ψ는 초기 λ mode에서 다음과 같이 $\Psi_{\lambda 0}$를 포함하는 항으로 나누어질 수 있다.

$$\psi(\vec{r}, E, t) = \psi_{\lambda 0}(\vec{r}, E) + \Delta\psi_\lambda(\vec{r}, E, t) \tag{5.59}$$

식 (5.59)을 대입 $\delta\rho(t) = \dfrac{1}{F_\lambda(t)}(\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F} - \mathbb{M}]\Psi)$

$$\xrightarrow{result} \delta\rho(t) = \frac{1}{F_\lambda(t)}\{(\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Psi_{\lambda 0}) + (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Psi_{\lambda 0}) \\ + (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\mathbb{F}_0 - \mathbb{M}_0]\Delta\Psi_\lambda) + (\Phi^*_{\lambda 0}, [\lambda_0\Delta\mathbb{F} - \Delta\mathbb{M}]\Delta\Psi_\lambda)\} \tag{5.60}$$

식 5.58과 식 5.60에서 각각 우변의 첫 번째, 세 번째 항은 0이 된다. 두 번째 항이 main 항이 되고 네 번째 항을 살펴보면 식 5.58은 초기에는 0이지만 시간이 지나면 크기를 가진다.(2차 방정식 형태) 식 5.60에서는 선형형태이다.
(see Sec 9-2 and chapter 11)