Five

THE POINT KINETICS EQUATIONS

5-1 The Exact Point Kinetics Equation

1) Exact

근사 없이 계산하는 시간, 공간, 에너지에 대한 의존성을 지닌 중성자 모델을 의미한다.

2) Exact Point Kinetics(일점 운동식) (식 3.51, 3.53과 비교)

1군 모델과 형태가 유사하다(유사점).

ρ, β, Λ, p, ζ_k, s에 관해 자세한 정의를 가진다(차이점).

3) 식의 전개

보통 Henry에 의한 볼츠만 식(Boltzmann equation)에서 출발하나, 이 장에서는 확산 식(diffusion equation)에 기초를 두어 진행한다.

5-1A Flux Factorization and Weighting Functions

1) 분해(Factorization)

① 플럭스를 시간에만 의존적인 크기 함수(amplitude function), $p(t)$와 공간, 에너지 및 시간 의존적인 형태 함수(shape function) $\psi(\boldsymbol{r}, E, t)$로 분해한다.

$$\phi(r, E, t) = p(t) \cdot \psi(\boldsymbol{r}, E, t)$$

② 시간에 따른 플럭스 변화가 *플럭스 크기 변화*와 *상대적으로 짧은 시간 동안의 형태 변화*로 구성되면, 플럭스 분해가 유용하게 된다.

③ 분해의 유일화(unique)

-형태 함수의 시간 변화에서 크기(magnitude)를 제한하여, 시간 의존성을 주로 크기 함수에 할당한다.

-시간 및 에너지에 대한 적분을 통해 유일화 시킬 수 있다.

④ 일반화(Generalization)

-1st: 형태 함수를 시간 의존적 형태로 구성한다.

-2nd: 적분에 앞서 중성자 식에 가중함수(weight function) $w(\boldsymbol{r}, E)$를 곱한다.

-식 3.28의 좌변 $\frac{1}{v}\frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}, E, t)}{\partial t}$ 에 가중함수를 곱한 뒤 분해하고 적분하면,

$$\int_V \int_0^\infty \frac{w(\boldsymbol{r}, E)}{v(E)} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{r}, E, t)}{\partial t} dE dV = \frac{dp(t)}{dt} \int_V \int_0^\infty \frac{w(\boldsymbol{r}, E)\psi(\boldsymbol{r}, E, t)}{v(E)} dE dV + p(t) \frac{d}{dt} \int_V \int_0^\infty \frac{w(\boldsymbol{r}, E)\psi(\boldsymbol{r}, E, t)}{v(E)} dE dV$$

우변과 같이 전개된다.

-동 적분에서 형태 함수의 시간에 따른 변화를 제한하면, 분해를 유일화 시킬 수 있다. 즉 우변의 두 번째 항 $p(t)\frac{d}{dt}\int_V\int_0^\infty \frac{w(\boldsymbol{r},E)\psi(\boldsymbol{r},E,t)}{v(E)}dEdV$를 상수라고 정하자 (근사 아님).

2) 가중함수(Weighting Ftn.)

① 가중함수의 선택 - 플럭스 분해의 유일화

-가중함수는 플럭스를 크기함수와 형태함수로 정확히 나누는 데 영향을 끼치므로 정확한 가중함수의 형태를 찾는 작업이 요구된다.

$$\phi(\boldsymbol{r},E,t) = p^w(t)\cdot\psi^w(\boldsymbol{r},E,t)$$

(superscript w means weighted)

단, $\psi(\boldsymbol{r},E,t)\simeq\phi_o(\boldsymbol{r},E)$.

(편의를 위해 $t<0$ *에서 정상(stationary) 상태를 가정*하면 초기 플럭스가 됨)

-동 식의 결과에서 플럭스와 크기함수 $p(t)$ 는 근사 해를 가진다. 일점운동방적식(P.K.E.)은 반응도의 오차에 민감하게 반응하므로, 앞서 언급한 것처럼 플럭스를 제대로 분해하기 위해서는 가중함수를 바르게 선택해야 한다. 특히 가중함수는 공간, 에너지 및 시간에 의존적인 형태함수의 오차를 줄이는 방향으로 선택되는 것이 좋은데 이는 플럭스 분해의 유일화 효과를 얻기 위해서이다. 따라서 가중함수는 초기 adjoint 플럭스인 $\phi_0^*(\boldsymbol{r},E)$로 선택해 준다. 즉, $w(\boldsymbol{r},E)=\phi_0^*(\boldsymbol{r},E)$로 선택한다. 이 과정을 통하면 형태함수 $\psi(\boldsymbol{r},E,t)\simeq\phi_o(\boldsymbol{r},E)$와 가중함수 $w(\boldsymbol{r},E)=\phi_0^*(\boldsymbol{r},E)$의 곱셈 계산이 쉬워지게 된다. 따라서 이러한 가중함수의 선택에 따라 $\int_V\int_0^\infty \frac{\phi_0^*(\boldsymbol{r},E)\psi(\boldsymbol{r},E,t)}{v(E)}dEdV=K_0$인 상수로 계산되어 형태함수가 1) ④의 네 번째 [-]의 제한 조건을 만족할 수 있다.

(대개 adjoint인 켤레 식/값의 경우 원함수와 adjoint함수의 곱은 scalar인 실수(real)로 얻어지게 되는데, 행렬인 경우와 복소수의 경우가 좋은 예가 된다)

② 가중함수의 선택 - 형태함수의 정규화

-가중함수의 선택은 형태함수의 정규화(normalization)에도 영향을 미친다; 정규화되지 않은(unnormalized), 알고 있는 형태함수 $\psi^{un}(\boldsymbol{r},E,t)$의 공간과 에너지에 대한 적분 값은 일반적으로 시간에만 의존하게 될 것이다. 가중함수가 없는 경우와 있는 경우를 생각해서 적분을 따져보면

$$\int_V\int_0^\infty \psi^{un}(\boldsymbol{r},E,t)dEdV=\widehat{\Phi}_1(t)$$

$$\int_V\int_0^\infty w(\boldsymbol{r},E)\psi^{un}(\boldsymbol{r},E,t)dEdV=\widehat{\Phi}_w(t)$$

로 적을 수 있다. 두 식 모두 우변을 ψ^{un}로 나누어 주면 각각 형태함수 ψ^1와 ψ^w로

구성된다. 이들은 서로 다른 시간 의존성을 가지며 모든 시간에 대해 서로 다른 제한 조건을 지닌다.

$$\int_V \int_0^\infty \psi^1(\boldsymbol{r}, E, t)\,dE\,dV = 1 \text{ for all } t$$

$$\int_V \int_0^\infty w(\boldsymbol{r}, E)\psi^w(\boldsymbol{r}, E, t)\,dE\,dV = 1 \text{ for all } t$$

크기함수가 이 차이점을 없애도록 구성되면, 플럭스

분해 $\phi(\boldsymbol{r}, E, t) = p^w(t) \cdot \psi^w(\boldsymbol{r}, E, t)$를 유일하게 만들 수 (유일화) 있다.

5-1B Derivation of the Exact Point Kinetics Equations for an Initially Critical Reactor

1) 독립적 중성자원이 없는 시간 의존적인 확산 식의 형태 (3.2A 참조)

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathrm{F}_p - \mathrm{M})\Phi + S_d \cdots(1)$$

(F_p는 즉발원, S_d는 지발원을 의미)

2) 노심 상태의 기술

① 반응로는 $t \le 0$에서 임계임을 가정하면,

$$0 = (\mathrm{F}_{p0} - \mathrm{M}_0)\Phi_0 + S_{d0} \cdots(2).$$

② 식 3.29c와 식 3.32로부터 정상(stationary) 상태의 지발 중성자원은,

$$S_{d0} = \mathrm{F}_{d0}\Phi_0 \cdots(3)$$

이다.

③ $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_{p0} + \mathrm{F}_{d0}$라 하면, 정상상태의 즉발 및 지발 중성자원은,

$$0 = (\mathrm{F}_0 - \mathrm{M}_0)\Phi_0 \cdots(4).$$

여기서 $\mathrm{F}_0\Phi_0$는 지발 중성자를 포함하는 식으로서,

$$\mathrm{F}_0\Phi_0 = \chi_p(E)\int_0^\infty v_p\Sigma_f(\boldsymbol{r}, E')\phi_0(\boldsymbol{r}, E')dE' + \sum_k \chi_{dk}(E)\int_0^\infty v_{dk}\Sigma_f(\boldsymbol{r}, E')\phi_0(\boldsymbol{r}, E')dE' \cdots(5)$$

로 나타낼 수 있다.

3) 시간 의존성의 배제

반응도의 개념에서 off-criticality의 정도를 기술하기 위해 F_d를 넣어 F를 만들고 다시 F_d를 뺀 후 바꾸어 쓰면 식 (1)은,

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathrm{F} - \mathrm{M} - \mathrm{F}_d)\Phi + S_d \cdots(6).$$

식 (5)와 유사하게 생각하면, $\mathrm{F}\Phi$ 는 $\mathrm{F}\Phi = \chi(E)\int_0^\infty v\Sigma_f(\boldsymbol{r}, E', t)\phi_0(\boldsymbol{r}, E', t)dE'$로 주어짐을 알 수 있다. 이 때 총

$\chi(E)\nu\Sigma_f(\boldsymbol{r},E')$ 값의 정의가 즉발 및 지발 분열 중성자원의 합과 늘 같지 않으므로 오차를 야기할 수 있다. 따라서 정역학적인 문제로 바꾸어, 즉 시간 의존성을 없애고 계산할 수 있다.

4) 의사-정상상태 지발 중성자원(quasi-stationary delayed neutron source)

마치 정상상태인 양 지발 중성자원을 기술하는 방법을 뜻한다. $\mathrm{F}_d\Phi$이 *정확한 시간 t에서의 실제 지발 중성자원을 의미하지 않는다*. 따라서 의사-정상상태 지발 중성자원의 개념을 도입한다. 이는 정상상태 노심에서, 마치 정확한 시간 t에서 존재하는 중성자 플럭스나 반응 단면적을 지니고 하나의 지발 중성자원이 생성된다고 '생각'하는 것이다.

5) 확산식의 변형

① 식 (6) $\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=(\mathrm{F}-\mathrm{M}-\mathrm{F}_d)\Phi+S_d$에 초기의 adjoint 플럭스를 곱하고, 공간과 에너지를 통해 적분하면,

$$\frac{\partial}{\partial}(\Phi_0^*,\frac{1}{v}\Phi)=(\Phi_0^*,[\mathrm{F}-\mathrm{M}]\Phi)-(\Phi_0^*,[\mathrm{F}_d]\Phi)+(\Phi_0^*,S_d)\ \cdots(7)$$

과 같은 식을 얻는다. 여기서 초기의 adjoint 플럭스는 adjoint 문제 $(\mathrm{F}_{0^*}-\mathrm{M}_{0^*})\Phi_0^*=0$의 해와 같다(adjoint의 성질에서 - 차원이나 켤레가 같은 경우 동일한 식을 의미).

② 동 식 (7)은 대개 연산자 F와 M의 시간 $t=0$와 $t=t$의 값들 간 차이를 이용해서 다르게 나타낼 수도 있다.

$$\Delta\mathrm{F}=\mathrm{F}-\mathrm{F}_0\ \cdots(8)$$

$$\Delta\mathrm{M}=\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\ \cdots(9)$$ 이고

앞서 ①에서 $(\Phi_0^*\cdot[\mathrm{F}_0-\mathrm{M}_0]\Phi)=(\Phi,[\mathrm{F}_{0^*}-\mathrm{M}_{0^*}]\Phi_0^*)=0\ \cdots(10)$ 에서,

$$\mathrm{F}=\Delta\mathrm{F}+\mathrm{F}_0,\quad \mathrm{M}=\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}_0\ \cdots(11)$$

$$\mathrm{F}-\mathrm{M}=\Delta\mathrm{F}+\mathrm{F}_0-\Delta\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\ \cdots(12)$$ 이므로

(식 (10)에서 $\mathrm{F}_0=\mathrm{M}_0=0$이므로)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_0^*,\frac{1}{v}\Phi)=(\Phi_0^*\cdot[\Delta\mathrm{F}-\Delta\mathrm{M}]\Phi)-(\Phi_0^*\cdot[\mathrm{F}_d]\Phi)+(\Phi_0^*\cdot S_d)\ \cdots(13)$$

을 얻을 수 있다.

6) 플럭스 분해

① 5장 앞부분에 소개된 플럭스 분해를 식 (13)에 적용하고, 식 (13)과 식 (7)은 중요도-가중(importance-weighted) 의사-정상상태 핵분열 중성자원으로 나뉜다. 그러면서 플럭스 형태함수 $\Psi(\boldsymbol{r},E,t)$를 생성하게 된다.

$$F(t)=(\Phi_0^*,\ \mathrm{F}\Psi)\ \cdots(14)$$

② 제한조건 $\int_V\int_0^\infty\frac{\phi_0^*(\boldsymbol{r},E)\psi(\boldsymbol{r},E,t)}{v(E)}dEdV=K_0$는 식 (13)에서 플럭스 크기함수만의 다른 운동식인

$$\Lambda(t)p(t)=[\rho(t)-\beta(t)]p(t)+s_d(t)\ \cdots(15)$$

$$단,\ s_d(t) = \frac{(\varPhi_0^*, \sum_k \chi_{dk}\lambda_k C_k)}{F(t)} = \frac{F_0}{F(t)} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \ \cdots(16)$$

를 만들어 낸다. $s_d(t)$에는 "reduced"되었다고 표현되는 adjoint된 가중 적분형태가 들어있다(마찬가지로 선행핵(precursors)의 수밀도 또한 "reduced"되었다고 표현한다).

③ ②의 식은 exact 운동식에서 다음과 같이 변형된다.

$$\varLambda(t) = \frac{(\varPhi_0^*, \frac{1}{v}\varPsi)}{(\varPhi_0^*, \mathrm{F}\varPsi)} = \frac{K_0}{F(t)} \text{ (식 (14)및 ② 참조)},$$

$$\rho(t) = \frac{1}{F(t)}(\varPhi_0^*, [\mathrm{F} - \mathrm{M}]\varPsi) \text{ (식 (7)로부터)},$$

$$\text{or } \rho(t) = \frac{1}{F(t)}(\varPhi_0^*, [\varDelta\mathrm{F} - \varDelta\mathrm{M}]\varPsi) \text{ (식 (13)으로부터)},$$

$$\beta(t) = \frac{1}{F(t)}(\varPhi_0^*, \mathrm{F}_d\varPsi) = \sum_k \beta_k(t),$$

$$(단,\ \beta_k(t) = \frac{1}{F(t)}(\varPhi_0^*, \mathrm{F}_{dk}\varPsi)),$$

$$\text{and } \zeta_k(t) = \frac{1}{F_0}(\varPhi_0^*, \chi_{dk}C_k).$$

$\zeta_k(t)$는 중요도 가중 감소(importance-weighted reduced) 지발 중성자원에서 구해진다. 또한 $\zeta_k(t)$의 분모에서 F_0는 다음과 같이 사용된다.

$$s_d(t) = \frac{1}{F(t)}(\varPhi_0^*, S_d) = \frac{F_0}{F}\sum_k \frac{\lambda_k}{F_0}(\varPhi_0^*, \chi_{dk}C_k) = \frac{F_0}{F}\sum_k \lambda_k\zeta_k(t) \ \cdots(17).$$

④ 공간 및 시간 의존적인 선행핵 balance 식은 감소되는 선행핵 $\zeta_k(t)$에 대한 balance 식을 만들어야만 한다. 따라서 식 3.32,

$$\frac{\partial C_k(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_k C_k(\boldsymbol{r}, t) + \int_0^\infty \nu_{dk}\Sigma_f(\boldsymbol{r}, E', t)\phi(\boldsymbol{r}, E', t)dE' \ \cdots(\text{식 } 3.32)$$

에는 $\phi_0^*(\boldsymbol{r}, E)$와 $\chi_{dk}(E)$가 모두 곱해진다.

$$\frac{d}{dt}(\varPhi_0^*, \chi_{dk}C_k) = -\lambda_k(\varPhi_0^*, \chi_{dk}C_k) + (\varPhi_0^*, \mathrm{F}_{dk}\varPsi)p(t), \ \cdots(18)$$

동 식은 시간 의존적 함수 $F_0 = (\varPhi_0^*, \mathrm{F}_0\varPsi_0)$로 나뉜다. 왜냐하면 좌변은 상수가 될 수 있기 때문이다. 따라서 감소하는 선행핵종에 있어, 정확한 balance 식은 ③의 정의를 도입하면 알 수 있듯이

$$\zeta_k(t) = -\lambda_k\zeta_k(t) + \frac{F(t)}{F_0}\beta_k(t)p(t) \ \cdots(19)\text{이다}.$$

⑤ 익숙한 형태로 만들기 위해서 식 (19)를 F_0 대신 시간에 비의존적인 K_0로 나눈다. K_0는 $K_0 = F(t)\cdot\varLambda(t)$인 값이다. 이 과정을 통해 식 (19)는

$$\dot{c}_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + \frac{1}{\varLambda(t)}\beta_k(t)p(t) \ \cdots(20).$$

(단, $c_k(t) = \frac{(\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k)}{K_0} = \frac{(\Phi_0^*, \chi_{dk} C_k)}{F(t) \cdot \Lambda(t)}$)

⑥ 식 (19)와 (20)은 $\frac{1}{\Lambda}$ 가 있고 없음에 차이가 있다. 식 (20)에는 $\frac{1}{\Lambda}$ 가 있고 식 (19)에는 $\frac{F(t)}{F_0}$ 가 있다. 식 (20)의 경우 $\frac{1}{\Lambda}$ 의 항에서 Λ가 되는 가정을 하면 안되므로 정확한 운동식은 아래 형태로 기술된다.

$$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \frac{1}{\Lambda_0} \sum_k \lambda_k \zeta_k(t) \quad \cdots \text{(두 번째 항은 초기값)}$$

$$\dot{\zeta}_k(t) = -\lambda_k \zeta_k(t) + \frac{F(t)}{F_0} \beta_k(t) p(t) \quad \cdots (19)$$

다른 형태로는,

$$\dot{p}(t) = \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} p(t) + \sum_k \lambda_k c_k(t),$$

$$\dot{c}_k(t) = -\lambda_k c_k(t) + \frac{1}{\Lambda(t)} \beta_k(t) p(t).$$

(35쪽에 기술된 까닭으로 인하여 사용하지 않음)