Three

PRELIMINARY FORMULATION OF THE Point Kinetics Equations

* Time-dependent neutron flux에 대한 Diffusion theory balance equation
  - Space & energy에 대한 함수 (※ exact neutron balance equation : angle에도 의존)

* 대부분 space 의존적인 precursor equation을 포함한 복잡한 equation set을 해결할 필요가 없다.

* Equation set → "Point kinetics equations" (시간에만 의존)
  - space와 energy에 대한 형식적인 비의존성을 표시하기 위해 널리 사용되는 용어
  - 각 변수에 대한 적분을 통해 얻어짐

* 이 장에서는 preliminary formulation을 유도, exact treatment는 5장에서 제시

3-1 Intuitive Point Kinetics - The Basic Concepts

3-1A The prompt Neutron Balance Equation

* 가정 : No independent source, Off-critical reactor, 모든 지발중성자가 즉시 방출

* The meaning of off-criticality : *The production of neutrons ≠ The loss of neutrons*

* (즉발중성자의 production and loss) ∝ (현존하는 중성자의 개수)

  ➡ (production과 loss의 차이) ∝ (원자로 내 중성자의 개수, n(t))

* *Off-balance*

$$\dot{n}(t) = \frac{dn(t)}{dt} \propto n(t) \quad \cdots\cdots (3.1) \quad \text{or} \quad \dot{n}(t) = \alpha n(t) \quad \cdots\cdots (3.2)$$

where α = inverse period

- α가 상수인 경우 (3.2)식의 해 ➡ $n(t) = n_0 \exp(\alpha t) \quad \cdots\cdots (3.3)$
- Neutron population : α의 부호에 따라 exponentially increase or decrease
  ※ Stationary flux : α = 0인 경우

* α : 중성자 production & loss의 off-balance에 따라 결정 ➡ Reaction rate의 차이로 표현
  - DB^2 term으로 누설되고 모든 중성자가 단순한 1군 theory에 의해 다루어지는 single homogeneous composition으로 구성된 원자로의 경우의 off-balance equation

$$\boxed{\frac{dn(t)}{dt} = \nu\Sigma_f\phi(t) - (\Sigma_a + DB^2)\,\phi(t) \qquad \cdots\cdots (3.4)}$$

  - $\phi(neutrons\ cm/s)$: $\phi(r,\ t)$를 homogeneous reactor composition 전체에 대한 공간 적분

➡ (3.4)식의 모든 항의 dimension : [neutrons / sec]

  - 1군 model에서 total integrated flux & 중성자의 개수 : 평균속도 $\bar{v}$에 관한 함수

$$➡ \ \phi = \bar{v}\,n \qquad \cdots\cdots (3.5)$$

  - (3.5) → (3.4) : $\frac{1}{v}\frac{d\phi}{dt} = (\nu\Sigma_f - \Sigma_a - DB^2)\,\phi \qquad \cdots\cdots (3.6)$

  - (3.6)식을 $\nu\Sigma_f$ 로 나누고, 증배계수 $k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2}$ $\cdots$ (3.7) 와

    반응도 $\rho = \frac{k-1}{k}$ $\cdots$ (3.8) 개념을 도입하여 (3.6)식 정리 ➡

$$\boxed{\frac{1}{\bar{v}\nu\Sigma_f}\frac{d\phi}{dt} = \rho\phi \qquad \cdots\cdots (3.9)}$$

3-1B Average Neutron Generation Time and Lifetime

* *"Average neutron generation time* (Λ)*"* : (3.9)식 좌변의 계수

$$➡ \ \Lambda = \frac{1}{\bar{v}\nu\Sigma_f} \qquad \cdots\cdots (3.10)$$

※ Λ : 연속적인 중성자 생성과정에서 두 개의 birth events 사이의 평균적인 시간을 의미

➡ "generation time"이라는 용어를 사용

* $\frac{1}{\Sigma_f}$ = "핵분열에 대한 mean free path"

  = 하나의 중성자가 생성되어 핵분열을 일으키기까지의 평균 이동거리

* $\frac{1}{v}\left[\frac{s}{cm}\right] \cdot \frac{1}{\Sigma_f}\,[cm] = \Delta t_f[s] \quad \cdots\cdots (3.11)$

➡ 중성자의 생성에서 핵분열 발생까지 평균적으로 소요된 시간

* 핵분열 반응당 ν개의 중성자가 생성되므로, 중성자의 생성과 다음 세대에서 하나의 중성자가 생성되기까지 평균적으로 걸리는 시간은 (3.11)식을 ν로 나눔으로써 구할 수 있다.

$$➡ \quad \frac{1}{\nu}\Delta t_f = \frac{1}{v}\frac{1}{\nu\Sigma_f} = \Lambda \quad \cdots\cdots (3.12)$$

* "Average neutron lifetime" : $l = \frac{1}{v}\frac{1}{\Sigma_a + DB^2} \quad \cdots\cdots (3.13)$

  - 중성자의 생성으로부터 흡수 / 누설되기까지의 평균 이동거리 = $\frac{1}{\Sigma_a + DB^2}$
  - 위의 식을 $\bar{v}$ 로 나누면 (3.13)식을 얻을 수 있다.
  - 누설이 없는 Infinite system에서 lifetime : B^2 = 0 ➡ $l_\infty = \frac{1}{v}\frac{1}{\Sigma_a} \quad \cdots\cdots (3.14)$

* Fig. 3-1

* 유한매질에서의 lifetime (l) 과 무한매질에서의 lifetime (l_∞)의 관계
  - 단순한 1군 모델에서 k와 k_∞간의 관계와 동일
  - $k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}\frac{1}{1+L^2B^2} = \frac{k_\infty}{1+L^2B^2} \quad \cdots\cdots (3.15a)$
  - $l = \frac{l_\infty}{1+L^2B^2} \quad \cdots\cdots (3.15b)$ where $L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$: one-group diffusion length

* Lifetime과 generation time의 관계
  - One-group generation time : system의 크기와 직접적 관련은 없음
  - One-group lifetime : DB^2 term이 포함되어 있음
  - 그러나, 서로 직접적으로 비례(즉발중성자에만 적용) : $l = k \cdot \Lambda \quad \cdots\cdots (3.16)$
    - ◦ subcritical : $l < \Lambda$: 중성자의 population 감소
    - ◦ critical : $l = \Lambda$
    - ◦ supercritical : $l > \Lambda$: 중성자의 population 증가

* generation time 또는 lifetime을 즉발중성자 kinetics equation (3.9)식에 대입

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda}\phi \quad \cdots\cdots (3.17) \quad \text{or} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta k}{l}\phi \quad \cdots\cdots (3.18)$$

- 두 equation은 동일한 뜻
- 고전문헌 : neutron의 개수에 기초를 둔 kinetics equation이 사용됨
- 현대문헌 : (3.17)식의 flux, reactivity, generation time과 같은 용어를 선호

* Neutron flux
  - Statics, static off-criticality 문제와 핵연료주기와 같은 원자로물리의 모든 분야에 사용
  - 따라서, dynamics의 경우에도 flux를 사용하는 것이 일관적이며 편리함.

* Dynamics에서의 반응도 : initiating & feedback의 복합적 영향으로 구성되기 때문에 중요
  - Δk 대신 ρ 사용 → lifetime보다 generation time 사용을 선호

* Λ & l : 종종 즉발중성자 generation or lifetime이라 부름
  - 이유 : precursor decay와 지발중성자 생성에서의 지연이 개념적으로 무시
  - 그러나, Λ가 단지 시간에 대한 derivative term 앞에 factor의 abbreviation으로 도입되므로 결과에 영향을 미치지는 않는다.
  - generation time으로서의 의미는 단지 이러한 요소에 대한 설명
    ◦ 어떠한 일관적 방법에 의한 계산에서 사용되지 않음

* **특정한 에너지의 즉발 & 지발중성자는 원자로 내에서 동일한 lifetime을 가짐**
  - 중성자 lifetime 앞에 "prompt"라는 용어를 사용하는 것은 잘못된 결과를 야기
  - generation time의 경우에도 동일
  - 따라서, 이 문헌에서는 사용하지 않음

3-1C The Effect of Delayed Neutron - The intuitive Point Kinetics Equations

* 즉발중성자의 생성만이 핵분열 과정과 직접 관련(지발중성자 : precursor의 β 붕괴 이후 생성)

* 이러한 차이를 포함시킨 equation

$$\frac{1}{v}\frac{d\phi}{dt} = (\nu_p \Sigma_f - \Sigma_a - DB^2)\,\phi + \sum_k \lambda_k C_k \quad \cdots\cdots (3.19)$$

  - (3.6)식 우변의 첫째 항인 total ν → 즉발중성자 생성비율인 ν_p로 대체
  - 지발중성자는 precursor의 β 붕괴율 형태로 추가
  - (3.19)식에서 지발중성자 precursor의 공간적 분포 : 원자로 전체에 대해 적분

- 다른 항과 마찬가지 방법으로 C_k를 나타낸다.

* 반응도 개념을 도입한 표현

- (3.19)식의 우변 괄호 안에 $\nu_d \Sigma_f$ 를 가감한 후 $\nu \Sigma_f$로 나눔

$$\frac{1}{v\nu\Sigma_f}\frac{d\phi}{dt} = \left[\frac{\nu\Sigma_f - (\Sigma_a + DB^2)}{\nu\Sigma_f} - \frac{\nu_d\Sigma_f}{\nu\Sigma_f}\right]\phi + \frac{1}{\nu\Sigma_f}\sum_k \lambda_k C_k$$

➡ $$\Lambda\frac{d\phi}{dt} = (\rho - \beta)\,\phi + \frac{1}{\nu\Sigma_f}\sum_k \lambda_k C_k \quad \cdots\cdots (3.20)$$

where ρ : 1군 근사, $\beta = \frac{\nu_d\Sigma_f}{\nu\Sigma_f} = \frac{\sum_i(\nu_d\Sigma_f)_i}{\sum_i(\nu\Sigma_f)_i}$ ……(3.21)

* Effective delayed neutron fraction : $\beta_{eff} = \beta$

- 6개의 delay group의 contribution 으로 표현할 수 있다.

$$\beta = \sum_{k=1}^{6}\beta_k \quad \cdots\cdots(3.22a) \qquad \beta_k = \frac{\nu_{dk}\Sigma_f}{\nu\Sigma_f} \quad \cdots\cdots(3.22b)$$

- level of sophistication에서 지발중성자와 전체 생성중성자의 비율로 구성

* The typical form of the kinetics equation : (3.20)식을 Λ 로 나눔

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda}\,\phi + \frac{1}{\Lambda\nu\Sigma_f}\sum_k \lambda_k C_k \quad \cdots\cdots (3.23)$$

* (3.23)식은 precursor의 생성 / 붕괴간의 balance를 표현함으로써 완성됨

$$\frac{dC_k}{dt} = -\lambda_k C_k + \nu_{dk}\Sigma_f\phi \qquad k = 1, \cdots, 6 \quad \cdots\cdots (3.24)$$

※ 우변 1번째 항 : precursor의 붕괴, 우변 2번째 항 : precursor의 생성

- ν_{dk}
  - ◦ (3.22b)식 : the group yield of delayed neutrons
  - ◦ (3.24)식 : the group yield of precursors
  - ◦ 두 개의 yields : precursor의 정의 때문에 수치적으로 동일

* The intuitive point kinetics equations

- (3.23) & (3.24)식 : 7개의 미지함수($\phi(t)$, $C_1(t) \sim C_6(t)$)에 대한 7개의 미분방정식

- $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\rho-\beta}{\Lambda}\phi + \frac{1}{\Lambda\nu\Sigma_f}\sum_k \lambda_k C_k$ ······ (3.25a)

- $\frac{dC_k}{dt} = -\lambda_k C_k + \nu_{dk}\Sigma_f\phi$ ······ (3.25b) : *precursor balance equation*

* $S_{pk} = \nu_{dk}\Sigma_f\phi$ ······ (3.26) : *precursor source*

- 고전문헌에서 $S_{pk} = \beta_k\nu\Sigma_f\bar{v}n$ ······ (3.27a)
- (3.12)식을 사용하면 $S_{pk} = \frac{\beta_k}{\Lambda}n$ ······ (3.27b)
- (3.27b)에서 S_{pk}가 Λ에 반비례한다는 것을 알 수 있음
- 하지만, direct formulation인 (3.26)에서는 알 수가 없음