2006학년도 1학기

응용핵물리기초

기말고사 문제지

2006. 6. 12. (月)

원자핵공학과

§ 객관식 문항에는 답 만을, 주관식 문항에는 풀이과정과 답을 작성하시오.

(PC1-1)

1. 다음 중 광자와 (정지) 자유전자 간의 산란에 해당되는 것은?
   ① Debye 산란 ② Rutherford 산란 ③ de Broglie 산란 ④ Compton 산란

2. 위치공간에서 어떤 입자의 파동함수 ψ(x)의 의미에 대한 정통적인 해석으로 가장 적합한 것은?
   ① 존재 확률에 해당된다. ② 존재 확률밀도에 해당된다.
   ③ 존재 확률에 관련된 amplitude이다. ④ 존재 불확실도에 해당된다.

3. 1차원 운동을 하는 입자의 파동함수를 ψ(x)로 할 때, 이 입자의 평균운동에너지로 가장 적합한 것은?
   ① $\frac{p^2}{2m}\psi^*(x)\psi(x)$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p^2}{2m}\psi^*(x)\psi(x)dx$
   ③ $-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx$ ④ $-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx$

4. 어떤 입자의 spin 각운동량 양자수는 s = 1이라고 한다. 이 입자의 spin 각운동량 부양자수 m_s가 취할 수 있는 값은 몇 가지인가?
   ① 0 가지 ② 1 가지 ③ 2 가지 ④ 3 가지

5. 파동함수 $\Psi(r,\theta,\phi)=R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi)=Cr\exp(-r/2a_0)\sin\theta\exp(i\phi)$, (C, a_0 : 상수)로 주어지는 상태의 parity는?
   ① + 1 ② 0 ③ − 1 ④ 정해지지 않음(부정)

6. 파장 λ_0의 photon이 입사하여 산란각 θ에서 파장 λ_1의 photon으로 산란되는 Compton 산란을 고려한다. 이때 두 파장 간에는 $\lambda_1=\lambda_0+\lambda_C(1-\cos\theta)$, ($\lambda_C\equiv h/m_ec$)의 관계가 성립한다.

   a) Compton wavelength λ_C를 Å 단위로 구하시오.
   (h = 6.626×10^{-34} J·s, m_ec^2 = 511 keV, c = 2.998×10^{8} m·s^{-1}, 1 eV = 1.602×10^{-19} J)

   b) $\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_0$를 θ의 함수로 plot 하시오.

   c) 이때 반동(recoil)되는 전자의 (운동) 에너지 E_e를 주어진 변수와 물리상수들을 이용하여 표현하시오.
   $E_e=E-E_1=\frac{hc}{\lambda_0}-\frac{hc}{\lambda_1}=\frac{hc}{\lambda_0}-\frac{hc}{\lambda_0+\lambda_c(1-\cos\theta)}$

   d) 전자의 에너지가 최대가 되는 photon의 산란 각도는?
   $\theta=\pi$

(계속)

7. de Broglie 파장 λ를 표현한 식 λ = h/( )에서 ( )에 적합한 량은?

① p (운동량) ② ν (진동수) ③ 2π ④ E (에너지)

8. 다음 중 운동량 p_x와 Hamiltonian H에 해당되는 operator들로 바르게 짝지워 진 것은?

① $\left(-\vec{\nabla}, +\frac{\partial}{\partial t}\right)$ ② $\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, +i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$

③ $\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right)$ ④ $\left(-\vec{\nabla}, +\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right)$

9. 다음 중 time-dependent Schrődinger 방정식의 해가 되지 않는 것은?

① $e^{i(kx-\omega t)}$ ② $e^{-i\omega t}\sin kx$ ③ $e^{+i\omega t}\cos kx$ ④ $\cos(kx+\omega t)$

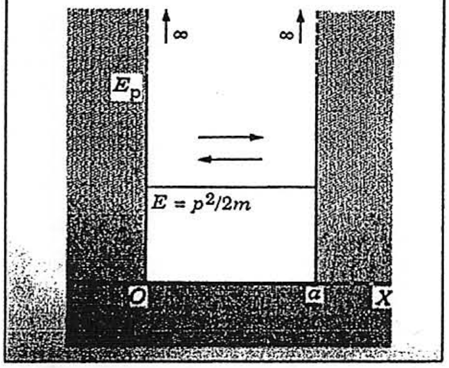
10. 다전자 원자의 3d 궤도에 들어갈 수 있는 전자의 최대수를 Pauli의 배타원리를 적용하여 구하면?

① 18 ② 10 ③ 5 ④ 20

11. 수소원자에서 핵과 전자의 상대운동 파동함수를 R(r)Y(θ,ϕ)로 나타낼 때, 반경 관련 파동함수 R(r)과 방향각 관련 함수 Y(θ,ϕ)에 각각 관련되는 양자수를 바르게 짝지은 것은? (여기서 n = 주양자수, ℓ = 궤도각운동량 양자수, m = 궤도각운동량 부양자수, m_s = 스핀각운동량 부양자수이며, 수소핵과 전자 간에는 정전기 포텐셜 만이 작용한다고 가정한다.)

	R(r)	Y(θ,ϕ)
①	n	ℓ
②	n	ℓ, m
③	n, ℓ	ℓ, m
④	n, ℓ	ℓ, m, m_s

12. 그림과 같은 1차원의 무한 깊이 사각우물형 potential에 대해 Schrődinger 방정식의 해로 주어지는 파동함수와 에너지는



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x, \quad (n \geq 1) \qquad \text{Eq. (37.10)}$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

으로 주어진다.

이 문제를 3차원으로 확장하여 고려하는 문제는 비교적 단순하나 그 결과에는 새로운 의미가 내포된다. 다음의 논의를 읽고서 물음에 답하라.

주 n: 1. 2. 3

궤도 ℓ. ... n-1.

m_ℓ -ℓ. 0. ℓ.

Table 37.1 Energy levels and degeneracies in a cubical potential box ($E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$).

Energy	Combinations of n_1, n_2, n_3	Degeneracy
$3E_1$	(1, 1, 1)	1
$6E_1$	(2, 1, 1)(1, 2, 1)(1, 1, 2)	3
$9E_1$	(2, 2, 1)(2, 1, 2)(1, 2, 2)	3
$11E_1$	(3, 1, 1)(1, 3, 1)(1, 1, 3)	3
$12E_1$	(2, 2, 2)	1
$14E_1$	(1, 2, 3)(3, 2, 1)(2, 3, 1) (1, 3, 2)(2, 1, 3)(3, 1, 2)	6

If instead of a one-dimensional potential box, we have a three-dimensional box or cavity of side a, it can be easily verified that the wave function has the form

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\frac{n_1\pi x}{a} \sin\frac{n_2\pi y}{a} \sin\frac{n_3\pi z}{a} \qquad \textbf{(37.12)}$$

where n_1, n_2 and n_3 are positive integers. Note that $\psi(x, y, z)$ is zero for x, y, z equal to zero or a, since the particle must be confined to the region inside the box.

The energy of the stationary state is now given by

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad \textbf{(37.13)}$$

which is the generalization of Equation 37.10. The possible energy values are obtained by giving n_1, n_2 and n_3 the values 1, 2, 3, ... They are given in Table 37.1 and are represented in Figure 37.4. The zero point energy for the three-dimensional box is $E_1 = 3\pi^2\hbar^2/2ma^2$.

An energy value in Equation 37.13 can be obtained with different combinations of n_1, n_2, n_3, as shown in Table 37.1. For each combination of n_1, n_2, n_3 there are different wave functions $\psi(x, y, z)$. Whenever different wave functions are associated with the same energy, it is said that there is a **degeneracy**. This is an important quantum feature that normally is associated with some symmetry of the physical system. In this example it is a consequence of the fact that the potential box is cubical and therefore we can rotate the box through an angle of $\pi/2$ about any coordinate axis and it remains the same. This is not the case if the box has different dimensions a, b, c.

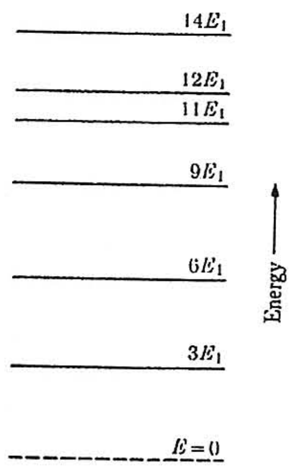


Figure 37.4 Energy levels for a cubical potential box.

(Questions)

a) What are degenerate states? Explain by a single sentence in English.

b) 그림 37.4의 맨 위의 $14E_1$ 에너지 준위 다음으로 높게 존재하는 준위의 에너지와 degeneracy를 각각 구하시오.

(끝)