응용핵물리 1 Lecture 8 Selected Problem (8-11. 8-13.)

8-11. 어떤 상황에서 선형 운동량의 연산자와 Hamiltonian 연산자가 상호 교환적이 되는가?

Sol) $\hat{L} = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$

$$[\hat{L}, \hat{H}] = \hat{L}\hat{H} - \hat{H}\hat{L}$$

$$= \hbar\sqrt{l(l+1)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right) - \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\hbar\sqrt{l(l+1)}$$

$$= \hbar\sqrt{l(l+1)} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

∴ l=0,-1 일때 상호 교환적이다.

8-13. 스핀 상태함수 β는 $\widehat{S^2}$과 $\widehat{S_z}$ 의 고유함수임을 보이라.

Sol)

$$|\beta> = \beta = \binom{0}{1}$$

$$\widehat{S^2} = \widehat{S_x^2} + \widehat{S_y^2} + \widehat{S_z^2} = \frac{\hbar^2}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_Z^2) = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1\,(\text{unit matrix})$$

$$\widehat{S^2}|\beta> = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\binom{0}{1} = \frac{3\hbar^2}{4}\binom{0}{1} = \frac{3\hbar^2}{4}|\beta>$$

$$\widehat{S_z}|\beta> = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\binom{0}{1} = \frac{\hbar}{2}\binom{0}{-1} = -\frac{\hbar}{2}\binom{0}{1} = -\frac{\hbar}{2}|\beta>$$

β는 $\widehat{S^2}$와 $\widehat{S_z}$의 고유함수이다.