응용핵물리I Lecture 6. Selected Problem (6-1, 6-3, 6-5, 6-9, 6-12)

6-1. 파장 0.712 $\dot{A}$인 x-선 광자 (photon)가 탄소 내에서 Compton 충돌을 일으킨다. 산란을 일으키는 입자가 a) 전자일 때와 b) 탄소 원자 전체일 때에 90° 로 산란되는 선의 파장 변화를 각각 구하라.

Sol) Compton Scattering에서

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta) \quad \text{...... (text 6.24식)}$$

이므로 산란을 일으키는 입자가 전자 일때는 $m_0 = m_e = 9.11 \times 10^{-11}$ (kg)

탄소 우너자 전체 일 때는 $m_0 = m_c = 12 \times 1.67 \times 10^{-27}$ (kg)을 각각

代入 해주게 되면,

a) $\lambda' = 0.712 \times 10^{-10} + \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^{8}}(1 - cos90^\circ)$

$= 0.734 \times^{-10} = 0.736\dot{A} \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0.0025\dot{A}$

b) $\lambda' = 0.712 \times 10^{-10} + \frac{6.63 \times 10^{-34}}{12 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 3.0 \times 10^{8}}(1 - cos90^\circ)$

$= 0.71519\dot{A}$

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0.0319\dot{A}$

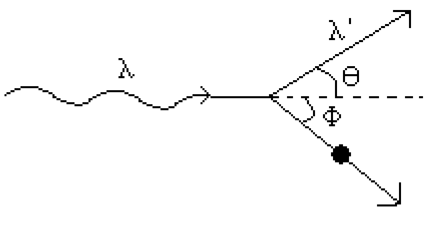
6-3. 에너지 E의 광자(photon)이 정지질량 m_0 인 자유 입자와 Compton 충돌을 한다.

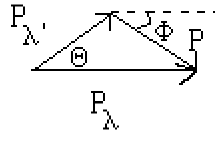
a) 이 입자의 최대 반도(recoil) 운동 에너지는

$$E_{kmax} = \frac{E^2}{E + m_0 c^2/2}$$

임을 보이라. b) 보라색 빛의 광자 ($\lambda = 4000\dot{A}$) 가 Compton 충돌을 할 때 자유 전자에 전달 될 수 있는 최대 에너지는? c) 보라색 광은 Compton 충돌에 의해 전자들이 금속으로부터 방출 될 수 있겠는가?

Sol)





the conservation of energy , momentum을 고려하면,

$$hv + E_0 = hv' + E$$

$$\overrightarrow{P_\lambda} = \overrightarrow{P_{\lambda'}} + \overrightarrow{P}$$

=> $P_\lambda^2 + P_{\lambda'}^2 - 2P_\lambda P_{\lambda'} cos\theta = P^2$

$$(hv)^2 + (hv')^2 - 2hvhv' cos\theta = p^2c^2$$

$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\theta)$ 식에서 $v = \frac{c}{\lambda}$ 이므로

$$\frac{1}{hv'} + \frac{1}{hv} = \frac{1}{m_0 c^2}(1 - cos\theta)$$

$hv' = \frac{m_0 c^2}{1 - cos\theta + 1/\gamma}$ $(\gamma \equiv \frac{hv}{m_0 c^2}$ 이므로,

반도된 전자의 운동 에너지는

$$E_k = hv - hv' = hv \frac{\gamma(1 - cos\theta)}{1 + \gamma(1 - cos\theta)}$$

여기서 maximum value를 가지기 위해서는 θ가 180° 일때 가능하다.

$$\therefore \quad E_{k,max} = hv \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma} = \frac{(hv)^2}{1/2 m_0 c^2 + hv} = \frac{E^2}{1/2 m_0 c^2 + E}$$

b) $\lambda = 4000\dot{A}$ 에서의 $E_{k,}max$ 를 구하면 되므로

a)에서 유도했던 $E_{k,}max$식을 쓰자.

$E = \frac{hc}{\lambda} = 3.105$ (eV)

$E_{k,max} = \frac{E^2}{E + 1/2 m_0 c^2} = \frac{(3.105)^2}{(3.105) + \frac{(0.511)}{2}} = 2.86$ (eV)

c) work function을 살펴보면,

Fe : 4.50 [eV]

Pb : 4.14 [eV]

Ag : 6.35 [eV]

etc .....

여러 가지 금속의 work function은 b)에서 구해보았던 2.86eV 보다 크므로
따라서 Compton Scattering에 의해서 방출 될 수 없음을 주지할 수 있다.

6-5. 정지 상태에서 전위차 V(volts)에 의해 가속된 전자에 대한 deBroglie 파장($\dot{A}$) 은 a) 고전적 으로는 λ = 12. 27 $V^{1/2}$ 이며, b) 상태론 적으로는

$$\lambda = \frac{12.27}{V^{1/2}} \left(\frac{V_e}{2m_e c^2} + 1 \right)^{1/2}$$ 으로 주어짐을 보이라.

Sol)

a) De Broglie's postulate of matter wave

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$E_k = eV = \frac{1}{2} m_e v^2$ 인 관계가 성립하므로 (Lecture 6 - 5page)

$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$ 이다.

$$\therefore \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e} v = \frac{h}{\sqrt{2em_e}} v^{1/2} \simeq \frac{12.27}{V^{1/2}}$$

b) 상대론적 관계에서는

$$p = mv\gamma \quad , \quad E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \qquad \text{..................} \quad (1)$$

$$V_e = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \right)$$

de Broglie 파장은 $\lambda = \frac{h}{p}$ 이므로 (1)번식에 E가 전위차 V에 의한 에너지이므로

$$(eV)^2 = c^2p^2 + m_0^2 c^4$$

$$p^2 = \frac{(eV)^2 - m^{2_0} c^4}{c^2}$$

$$p = \left(\frac{(eV)^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right)^{1/2}$$

$\lambda = \frac{h}{p}$ 이므로 p를 代入하면,

$$\lambda = \frac{h}{p} = h \left(\frac{(eV)^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right)^{(-1/2)}$$

$$= h \cdot (2em_0)^{-1/2} \cdot (V)^{-1/2} \cdot \left(\frac{V_e}{2mc^2} + 1 \right)^{-1/2}$$

$$\simeq \frac{12.27}{V^{1/2}} \cdot \left(\frac{V_e}{2mc^2} + 1 \right)^{-1/2}$$

6-9. 다음식 $v_g = u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$ 에 의해 위상 속도 u로부터 군 속도 v_g를 얻을 수 있음을 보이라.

Sol)

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{dw}{(\frac{-k}{\lambda}d\lambda)} \qquad (\because 2\pi = k\lambda$$

$$0 = \lambda dk + k d\lambda$$

$$dk = -\frac{k}{\lambda}d\lambda \quad)$$

$$= -\frac{\lambda}{k} \cdot (\frac{dw}{d\lambda}) = -\frac{\lambda}{k} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{du}{d\lambda} - \frac{w}{2\pi})$$

$$(\because \ u = \lambda v = \lambda \cdot \frac{w}{2\pi}$$

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{w}{2\pi} + \frac{\lambda}{2\pi}\frac{dw}{d\lambda}$$

$$\frac{dw}{d}\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{du}{d\lambda} - \frac{w}{2\pi}) \qquad)$$

$$= -\frac{2\pi}{k}(\frac{du}{d\lambda} - \frac{w}{2\pi})$$

$$= -\frac{2\pi}{k}\frac{du}{d\lambda} + \frac{w}{k}$$

$$= u - \lambda\frac{du}{d\lambda}$$

6-12. 어느 입자 위치의 불확정도가 그 deBroglie 파장과 동일하다고 가정한다. 이 경우 속도의 불확정성은 근사적으로 속도와 동일함을 보이라.

Sol) $\Delta E \cdot \Delta t \simeq \hbar$

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{4.14 \times 10^{-15}[eV \cdot s]}{2\pi \times 10^{-8}[s]}$$

$$= 6.5 \times 10^{-8}[eV]$$

Bohr 이론에서 주어진 -3.39eV에 비해 엄청 작은 양이다.