응용핵물리 I Lecture 5. Selected Problem (5-1, 5-3, 5-7, 5-8)

5-1. 운동에너지 7.68MeV를 갖는 α-입자가 구리 원자의 고정된 핵에 직통으로 입사되고 있다. 가장 가까이 다가가는 최단거리는?

Sol) $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\phi^2) + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

최단거리에서는 $\dot{r}$ 과 $\dot{\phi}$ 이 0이므로,

$E = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \therefore r = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E}$

E= 7.68 MeV = $7.68 \times 1.6 \times 10^{-13}$

z = 1

Z = 29

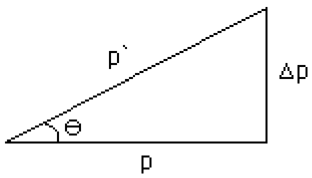
e = 1.6×10^{-19}

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$

$\therefore r = 5.43 \times 10^{-15}$m

5-3. 비상대론적 에너지의 α-입자가 속도 v로써 정지한 자유 전자에 충돌한다. 이 경우 α-입자의 최대 편향각은 약 10^{-4}rad 임을 보이라.

Sol)



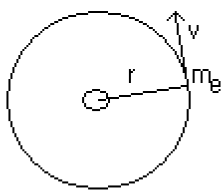
$\frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{m_e}{m_\alpha} \simeq \frac{1}{8000} = 10^{-4}$

$\therefore tan\theta = \frac{\Delta p}{p} \simeq \theta < 10^{-4}$ (rad)

따라서 가장 크게 편향될 수 있는 각은 10^{-4}rad 이다.

5-7. 수소 원자에 대한 Bohr 모형은 궤도 전자가 양성자로부터 어떤 고정 거리 상에서만 발견될 수 있으며, 보다 큰 반경이 보다 큰 양자수(quantum number)에 해당된다는 것이다. 수소 원자에서 전자가 보다 큰 반경 방향으로 움직여 간다고 가정하자. 다음의 량들 중에서 어느 것이 감소하고, 어느 것이 증가하는 가? - 각 운동량, 총 에너지, 위치 에너지, 운동 에너지, 회전 주기.

Sol)



만약 r이 증가를 한다면 각 운동량 $m_e vr = n\hbar$ 이므로 보전되고,

총 Energy = $E_k + E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2\alpha_0} \cdot \frac{1}{\hbar^2}$ 이므로 보전된다.

Potential Energy는 $E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 이므로 증가하고

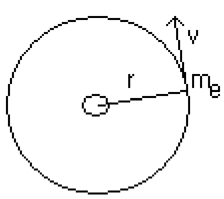
대신에 Kinetic Energy $E_k = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ 이므로 감소한다.

회전 주기 $T = \frac{2\pi r}{v}$ 이므로 $v = \frac{n\hbar}{m_e r}$ 이므로

$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m_e r^2}{n\hbar}$ 이므로 증가하게 된다.

5-8. 중심으로 향하는 "용수철" 힘 kr (k:상수)을 받으며 질량 m의 입자가 반경 r의 원형 궤도 상에서 움직이고 있다. Bohr's postlates가 이 system 에도 적용 된다고 가정하고, a) 허용되는 궤도의 반경들과, b) 이들 궤도의 에너지를 양자수 n을 써서 표현하라. c) 이 입자가 하나의 궤도에서 인접한 궤도로 천이 할 때 방출하는 복사 주파수는 원형 순환운동의 주파수와 동일함을 보이라.

Sol) a)



Bohr's postulates : angular momenta = $n\hbar$

$$mvr = n\hbar \quad ..... \ (1)$$

$$\frac{mv^2}{r} = kr \quad ..... \ (2)$$

$$\therefore v^2 = \frac{kr^2}{m}$$

$$v = r\sqrt{\frac{k}{m}}$$ 이를 (1)에 代入

$$m \cdot r\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot r = n\hbar$$

$$\therefore r^2 = \frac{n\hbar}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{n^2\hbar^4}{mk}}$$ ...... 가능한 궤도 반경.

c) $$E = \frac{1}{2}(kr^2 + mv^2) = \frac{1}{2}(2 \cdot kr^2) = kr^2$$

$\therefore$ Bohr's formula 에 따라서 $hv = E_{n2} - E_{n1}$

$$v = \frac{1}{h}\left(k \cdot n_1\hbar\sqrt{\frac{1}{mk}} - k \cdot n_2\hbar\sqrt{\frac{1}{mk}}\right) \qquad \because\ r^2 = n\hbar\sqrt{\frac{1}{mk}}$$

$$= \frac{n_1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} - \frac{n_2}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\because \text{ 인접지역이므로 } \Delta n = 1)$$

이번에 원형순환 주파수는 v로 잡을 때 T=$\frac{1}{v}$이고,

$T = \frac{2\pi r}{V}$이다.

$$\therefore\ v = \frac{V}{2\pi r} = \frac{r\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

따라서, 인접한 궤도로 천이하는 복사 주파수와 원형 순환 운동의 주파수가 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ 로 동일함을 알 수 있다.