

응용해물리I Lecture 4. Selected Problem (4-1, 4-2, 4-5, 4-9, 4-12)

4-1. 진폭A, 주파수  $\nu$ 로써 단순한 조화진동(Harmonic Oscillation)을 하는 질량  $m$  인 물체의 시각  $t$ 에서의 변위(displacement)  $x$  는  $x = A\sin 2\pi\nu t$  로 주어진다.

a) 이 물체의 운동 에너지  $T$ 는  $2m\pi^2\nu^2 A^2 \cos^2 2\pi\nu t$  임을 보이라.

b) 진동의 한 주기에 대한  $T$ 의 시간 평균과 위치 에너지  $V$ 의 시간 평균은 각각 진자의 총에너지  $2m\pi^2\nu^2 A^2$ 의 절반과 동일함을 보이라.

Sol) a)  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$x = A\sin 2\pi\nu t$$

$$\dot{x} = A \cdot 2\pi\nu \cos 2\pi\nu t$$

$$\therefore T = 2m\pi^2\nu^2 A^2 \cos^2 2\pi\nu t$$

$$b) \langle T \rangle = 2m\pi^2\nu^2 A^2 \langle \cos^2 2\pi\nu t \rangle = 2m\pi^2\nu^2 A^2 \langle \frac{1 - \cos 4\pi\nu t}{2} \rangle$$

$$= m\pi^2\nu^2 A^2$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$x \text{ 代入 후 } \Rightarrow m \cdot A \cdot (2\pi\nu)^2 \sin 2\pi\nu t = k \sin 2\pi\nu t \cdot A$$

$$\therefore k = m \cdot 4\pi^2\nu^2$$

$$\langle V \rangle = \langle \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{2}m \cdot 4\pi^2\nu^2 \langle A^2(1 - \sin 2\pi\nu t)^2 \rangle$$

$$= 2m\pi^2\nu^2 A^2 \langle 1/2 \rangle$$

$$= m\pi^2\nu^2 A^2$$

$\therefore \langle T \rangle$ 와  $\langle V \rangle$ 는 진자의 총 에너지  $2m\pi^2\nu^2 A^2$  의 절반이다.

4-2. Plank의 복사 법칙은 단파장의 극한에서 Wien의 법칙으로 환원되며, 장파장의 극한에서는 Rayleigh-Jeans 법칙으로 환원됨을 보이라.

Sol) Planks =>  $\psi_\lambda d\lambda = \frac{c\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} d\lambda$

장파장인 경우  $\lambda$ 가 커짐, 따라서  $c_2/\lambda T$ 는 작아지고

$\exp(c_2/\lambda T) \cong (1 + c_2/\lambda T)$       2nd order이상은 절삭.

$\therefore \psi_\lambda d\lambda = c'\lambda^{-4}d\lambda$       ..... Rayleigh-Jeans's law

단파장인 경우 ' $\lambda$ 는 작아짐

$\exp(c_2/\lambda T) - 1 \cong \exp(c_2/\lambda T)$

$\therefore \psi_\lambda \cdot \lambda = c'\lambda^{-5}\exp(-c_2/\lambda T)d\lambda$       ..... Wien's law

4-5. 0에서  $\infty$ 의 전체 진동수 영역에 대한 흑체복사의 전체 에너지 밀도는 전체 복사선에 대한 Stefan-Boltzmann 법칙과 동일한 형태임을 보이라. 증명에 이용되는 정

적분으로서  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$  이다.

Sol)  $\int_0^\infty \frac{8\pi h v^3}{c^3 (e^{hv/kT} - 1)} dv = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^3}{e^{hv/kT} - 1} dv$        $x = hv/kT$ 로 잡고.

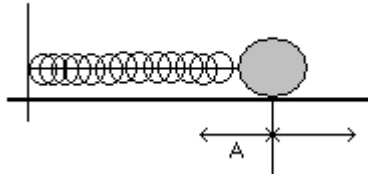
$= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{(\frac{kT}{h})^3 x^3}{e^x - 1} \cdot \frac{kT}{h} dx$        $(\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15})$

$= \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} \cdot (\frac{kT}{h})^3 \cdot (\frac{kT}{h})$

$= \frac{8\pi^5 k^4}{15 \cdot c^3 h^3} \cdot T^4 = \sigma \cdot T^4$       => Stefan Boltzmann 법칙

4-9. 질량 10g의 추가 용수철 상수(force constant)  $25\text{Nm}^{-1}$ 인 용수철에 매달려 있다. 이 진자가 복사 진자(radiation oscillator)처럼 양자화된다고 가정하자. a) 추에 공급될 수 있는 최소한의 에너지는? b) 정지 상태의 추가 a)에서 구해진 최소한의 에너지를 흡수할 때 일어나는 진동의 진폭(amplitude)은? c) 추가 10cm의 진폭을 가지려면 몇 개의 양자를 흡수해야 하는가?

Sol)



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$x(0) = 0 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\Rightarrow x = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{인 모형.}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } E = h\nu &= h \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) = h \left( \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \right) = 6.63 \times 10^{-34} \cdot \sqrt{\frac{25}{0.01}} \cdot \frac{1}{2\pi} \\ &= 5.27 \times 10^{-33} \text{ J} \end{aligned}$$

양자화 됐을 경우 최소 E는  $h\nu$ 만큼

필요하므로  $E = h\nu = 5.27 \times 10^{-33} \text{ J}$  필요하다.

$$\text{b) } E = \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore x = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2.06 \times 10^{-17} \text{ m.}$$

c) 10cm의 진폭을 가지기 위해  $E = h\nu$ 를 가지는 n개의 양자가 필요하다면  
그  $E = nh\nu$ 가 되고 이것은.

$$E = n \cdot h\nu = \frac{1}{2}kx^2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n = \frac{kx^2}{2h\nu} = 2.37 \times 10^{31} \#$$

4-12. 대부분의 사진 필름에는 감광 물질로서 브롬화 은이 이용된다. 단순하게는 필름의 감광작용이 흡수된 빛 에너지가 AgBr 분자를 원자들로 분해시킬 때 일어난다고 말할 수 있다. AgBr의 분해열 또는 분해 에너지는 23.9 kcal/mole이다. AgBr 분자를 간신히 분해 시킬수 있는 광자의 a) 에너지는? b)파장, c) 진동수는? d) 100Mhz의 진동수를 갖는 무선 통신파의 양자의 에너지(eV)는? e) 반딧불이의 빛은 사진 필름을 감광 시킬 수 있지만, 100Mhz의 진동수와 송신 출력 50,000W 로써 방송되는 무선 TV파는 사진 필름을 감광시키지 않는다. 그 이유는?

Sol)

a)  $E=hc/\lambda$

$$23.9\text{kcal/mole} = \frac{10^3}{4.2} 23.9\text{J}/6.02 \times 10^{23} = 0.0591\text{eV}$$

b)  $E = hc/\lambda = h\nu \Rightarrow \therefore \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.0 \times 10^8}{9.45 \times 10^{-21}}$   
 $= 2.1 \times 10^{-5} \text{ (m)}$

c)  $\nu = \frac{c}{\lambda} = 1.43 \times 10^{13} \text{ (hz)}$

d)  $E = h\nu = 6.63 \times 10^{-34} \times 100 \times 10^6 = 6.63 \times 10^{-26} \text{ J}$

e) work function 이상의 Energy가 흡수되어야 하지만 100Mhz의 진동수를 가지는 무선 통신파의 E는 위 23.9kcal/mole 에 해당하는 E에 못 미치는 E이다.

f) 각자 생각하시오.

