-수치해석 중간고사 2-

문제 1.

아래 2계 상미분 방정식의 수치해를 구하고자 한다. 물음에 답하라.(30점)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 2y^3(t), t \in (1, 1.9); y(1) = -1, y'(1) = -1$$

[1] 식(1)을 2원 1차 연립 미분 방정식으로 변환하라.

$$u_1 = y \quad u_2 = y'$$

$$\frac{du_!}{dt} = y' = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = y'' = 2y^3 = 2u_1^3$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ 2u_1^3(t) \end{bmatrix}$$

[2] [1]에서 구한 2원 1차 방정식의 수치 해를 2차의 Taylor 해법으로 구하여라.

$$u_1 = y \quad u_2 = y'$$

$$\frac{du_!}{dt} = y' = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = y'' = 2y^3 = 2u_1^3$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ 2u_1^3(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}U = f(u_1, u_2, t)$$

$$U_i - U_{i-1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f dt$$

Taylor series 는 다음과 같다.

$$f = f(t_i) + \frac{df}{dt}|_{t=t_i}(t - t_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dt^2}|_{t=t_i}(t - t_i)^2$$

따라서 ,

$$f_1 = u_2(t)$$

$$\frac{df_1}{dt}|_{t_i} = \frac{du_2(t)}{dt}|_{t=t_i} = 2u_i^3(t_i)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2}|_{t=t_i} = \frac{d^2 u_2}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{du_2}{dt}) = \frac{d}{dt}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dt} = 3u_1^2 \cdot u_2|_{t=t_i}$$

$$f_1(t) = u_2(t_i) + 2u_1^3(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2!}3u_1^2(t_i)u_2(t_i)(t - t_i)^2$$

$$f_2(t) = 2u_1^3(t_i)$$

$$\frac{df_2}{dt}|_{t=t_i} = \frac{d}{dt} \cdot 2u_1^3|_{t=t_i} = 6u_1^2 \cdot u_2|_{t=t_i} = 6u_1^2(t_t) \cdot u_2(t_i)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} = \frac{d}{dt}(6u_1^2 u_2) = 12u_1 u_2 \frac{du_1}{dt} + 6u_1^2\frac{du_2}{dt} = 12u_1 u_2^2 + 12u_1^5$$

$$f_2(t) = 2u_1^3(t_i) + 6u_1^2(t_i)u_2(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2!}(12u_1 u_2^2 + 12u_1^5)(t - t_i)^2$$

$$f_1(t) = u_2(t_i) + 2u_1^3(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2!}3u_1^2(t_i)u_2(t_i)(t - t_i)^2$$

$$f_2(t) = 2u_1^3(t_i) + 6u_1^2(t_i)u_2(t_i)(t-t_i) + \frac{1}{2!}(12u_1u_2^2 + 12u_1^5)(t-t_i)^2$$

$$U_{i+1} - U_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \begin{bmatrix} u_{2i} + 2u_{1i}^3(t-t_i) + \frac{3}{2}u_{1i}^3 u_{2i}(t-t_i)^2 \\ 2u_{1i}^3 + 6u_{1i}^2 u_{2i}(t-t_i) + \frac{12}{2!}(u_{1i}u_{2i}^2 + u_{1i}^5)(t-t_i)^2 \end{bmatrix}$$

[3] 시간간격 h를 h=0.1로 잡고 y(1.2)를 구하라. 그 결과를 정해 $y(t)=\frac{1}{t-2}$ 와 비교하라.

$$\begin{bmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{2,i}h + u_{1,i}h^2 + \frac{h^3}{2}(u_{1,i}^3 u_{2,i}) \\ 2u_{1,i}^3 h + 3u_{1,i}^2 u_{2,i}h^2 + 2(u_{1,i}u_{2,i}^2 + u_{1,i}^5)h^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(1.1) \\ u_2(1.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} u_2(1)\cdot 0.1 + u_1(1)\cdot 0.1^2 + \frac{0.1^3}{2}(u_1^3(1)u_2(1)) \\ 2u_1^3(1)\cdot 0.1 + 3u_1^2(1)u_2(1)\cdot 0.1^2 + 2(u_1(1)u_2(1)^2 + u_1^5(1))\cdot 0.1^3 \end{bmatrix}$$

마찬가지로 $\begin{bmatrix} u_1(1.2) \\ u_2(1.2) \end{bmatrix}$ 도 계산을 하면, 각각 다음과 같은 값을 얻을 수 있다.

$u_1(1.1) = -1.1095$, $u_2(1.1) = -1.234$

$u_1(1.2) = -1.243152$, $u_2(1.2) = -1.55947$

$$\therefore y(1.2) = u_1(1.2) = -1.243152$$

따라서 이 값은 실제 정해인 $y(1.2) = \frac{1}{1.2-2} = -1.25$와 0.006948의 차이를 보인다.

문제 2. 다음 1계 미분 방정식을 참조하여 물음에 답하라 (70 점)

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)),\ t \in [a,b];\quad y(a) = \alpha$$

[1] 3차 테일러 해법

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}f_i' + \frac{h^3}{6}f_i'' + O(h^4)$$

$$= y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}(f_{ti} + f_{yi}f_i) + \frac{h^3}{6}(f_{tti} + 2f_{tyi}f_i + f_{yy}f_i^2 + f_{yi}f_{ti} + f_{yi}^2 f_i) + O(h^4)$$

3차 Runge Kutta 해법

$$y_{i+1} = y_i + aK_1 + bK_2 + cK_3$$

$$= y_i + ahf_i + bhf(t_i + ph, y_i + pK_1) + chf(t_i + rh, y_i + sK_2 + (r-s)K_1)$$

$$= y_i + ahf_i + bh\{f + ph(f_t + f_y f) + p^2h^2(\frac{1}{2}f_{tt} + f_{ty}f + \frac{1}{2}f_{yy}f^2)\}$$

$$+ ch\{f + rh(f_t + f_y f) + h^2\{sp(f_t f_y + f_y^2 f) + r^2(\frac{1}{2}f_{tt} + f_{ty}f + \frac{1}{2}f_{yy}f^2)\} + O(h^4)$$

$$= y_i + (a+b+c)hf + h^2(bp + cr)(f_t + f_y f)$$

$$+ h^3\{csp(f_t f_y + f_y^2 f) + (bp^2 + cr^2)(\frac{1}{2}f_{tt} + f_{ty}f + \frac{1}{2}f_{yy}f^2)\} + O(h^4)$$

두 식을 비교하면,

$$\therefore a + b + c = 1,\ bp + cr = \frac{1}{2}, bp^2 + cr^2 = \frac{1}{3}, csp = \frac{1}{6}$$

[2] $\frac{dy(t)}{dt} = f(t.y) = 1 + t\sin[ty(t)], t \in [0,2]; y(0) = 0$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[f(t_i,y_i) + 4f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i,y_i)) + f(t_i + h, y_i + 2hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i,y_i) - hf(t_i,y_i))]$$

단, $t(0) = 0, y(0) = 0, h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}K_1 + \frac{4}{6}K_2 + \frac{1}{6}K_3$$

$$K_1 = hf(t_0,y_0) = 0.1$$

$$K_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_1) = 0.100012$$

$$K_3 = hf(t_0 + h, y_0 + 2K_2 - K_1) = 0.1001$$

$$\therefore y_1 = 0.1001$$

같은 방법으로 y_2를 구하면,

$$K_1 = hf(t_1,y_1) = 0.1001$$

$$K_2 = hf(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}K_1) = 0.100338$$

$$K_3 = hf(t_0 + h, y_0 + 2K_2 - K_1) = 0.100802$$

$$\therefore y_1 = 0.204760$$

[3] $f_t = \sin[ty] + ty\cos[ty]$

$f_{tt} = y\cos[ty] + y\cos[ty] - ty^2\sin[ty] = 2y\cos[ty] - ty^2\sin[ty]$

$f_y = t^2\cos[ty]$

$f_{yy} = -t^3\sin[ty]$

$f_{ty} = 2t\cos[ty] - t^2 y\sin[ty]$

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}(f_{ti} + f_{yi}f_i) + \frac{h^3}{6}(f_{tti} + 2f_{tyi}f_i + f_{yy}f_i^2 + f_{yi}f_{ti} + f_{yi}^2 f_i) + O(h^4)$$

$f(0,0) = 1$

$f_t = \sin[0] + 0\cos[0] = 0$

$f_{tt} = 0\cos[0] - 0\sin[0] = 0$

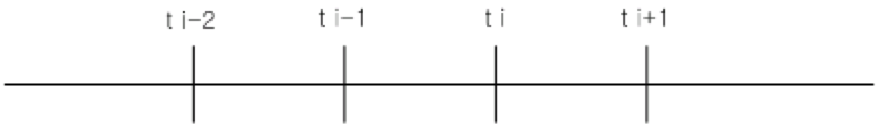
$f_y = 0\cos[0] = 0$

$f_{yy} = -0\sin[0] = 0$

$f_{ty} = 0\cos[0] - 0\sin[0] = 0$

$$\therefore y(0.1) = y_1 \approx 0 + 0.1 \times 1 + \frac{0.01}{2}(0+0) + \frac{0.001}{6}(0 + 2\times 0 + 0 + 0 + 0) = 0.1$$

[4] 식(2)에 대한 Adams-Moulton 의 3단계 해를 유도하면 다음과 같다. 이 식을 유도하라. 이 수식의 절단 오차 R은 (6)과 같다. 이를 증명하라. (20점)



$$f(t) = f_{i+1} + f[t_{i+1}, t_i](t - t_{i+1}) + f[t_i + 1, t_i, t_{i-1}](t - t_{t+1})(t - t_i) + f[t_{i+1}, ..., t_{i-2}]\,(t - t_{i+1})$$
$$\cdot\ (t - t_i)(t - t_{i-1}) + f[t, t_{i+1,}.........t_{i-2}](t - t_{i+1})\,......\,(t - t_{i-2})$$

$$= f_{i+1} + \frac{\nabla f_{i+1}}{h}(t - t_{i+1}) + \frac{1}{2!h^2}\nabla^2 f_{i+1}(t - t_{i+1})(t - t_i) + \frac{\nabla^3 f_i}{3!h^3}(t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-1})$$
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{t-1})(t - t_{i-2})$$

$$\therefore y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)dt \simeq y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} < f(t) > dt$$

$t = t_i + sh$ 를 대입하면,

$$y_{i+1} \cong y_i + h\int_0^1 ds < f_{i+1} + \nabla f_{i+1}(s-1) + \frac{\nabla^2 f_{i+1}}{2}(s-1)s + \frac{\nabla^3 f_{i+1}}{6}(s-1)s(s+1)$$
$$+ \left[\ \frac{h^5}{4!}\int_0^1 f^{(4)}(\xi)(s-1)s(s+1)(s+2)ds\ \right] \quad => \mathrm{R}$$

$$\therefore R = \frac{h^5}{4!}f^{(4)}\int_0^1 (s-1)s(s+1)(s+2)ds$$
$$= -\frac{19}{720}f^{(4)}h^5$$

$$y_{i+1} \cong y_i + h\left(f_{i+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{i+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{i+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{i+1}\right)$$
$$= y_i + \frac{h}{24}\{9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})\}$$

[5] 식(4)의 수치 해를 위의 Adams-Moulton 의 3 단계 해로 구하고자 한다. w(0.1) , w(0.2), w(0.3) 등을 이 해법만으로 구할 수 있겠는가? 아니면 어떤 도움이 필요한가? 시험문제 중에서 그 방법을 찾는다면 어떤 수단이 가능한가? w(0.3)을 구하는데 있어서 다른 어려움은 무엇인가?

Adams-Moulton의 3단계 해법에 의해서는 w(0.1), w(0.2)값을 구할 수 없다. w(0.1), w(0.2)값을 구하기 위하여서는 다른 보조 수단을 필요로 한다. 만약 w(0.1), w(0.2)값을 안다면 w(0.3)값을 구할 수 있게 된다. 따라서 Adams-Moulton의 3단계 해법을 이용하기 위해서는 다른 방법을 이용하여 w(0.1), w(0.2) 값을 구한 후 이를 이용해서 w(0.3)을 계산해야 한다. 시험문제 2-2번에서 사용한 단일 단계 해법인 3차 Runge Kutta 방법을 이용하여 w(0.1), w(0.2)을 얻으면 된다. 하지만 오차의 차수를 맞추기 위해 4차 Runge Kutta 방법을 이용해야 하는 어려움이 있다.