수치해석 기말고사 2004.12.9일 원자핵 공학과

문제 1 아래 2계 상미분 방정식의 수치해를 구하고자 한다. 물음에 답하라 (30점)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 2y^3(t), t \in (1,1.9);\ y(1)=-1,\ y'(1)=-1 \qquad (1)$$

[1] 식(1) 을 2원 1차 연립 미분 방정식으로 변환하라.

[2] [1]에서 구한 2원 1차 연립 미분 방정식의 수치 해를 2차의 Taylor 해법으로 구하라.

[3] 시간간격 h 를 h=0.1 로 잡고 y(1.2) 를 구하라. 그 결과를 정해 $y(t) = \frac{1}{t-2}$ 와 비교하라.

문제 2. 다음 1계 미분 방정식을 참조하여 물음에 답하라 (70 점)

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)),\ t \in [a.b];\ y(a)=\alpha \qquad (2)$$

[1] 상기 방정식의 3 차 Runge Kutta 해는 다음과 같다

$$y_{i+1} = y_i + aK_1 + bK_2 + cK_3;\ K_1 = hf(t_i, y_i),\ K_2 = hf(t_i + ph, y_i + pK_1),$$
$$K_3 = hf(t_i + rh, y_i + sK_2 + (r-s)K_1)$$

계수 a,b,c, p,r,s 사이에 다음 관계가 성립함을 보여라. (20 점)

$$a + b + c = 1,\ bp+cr=\frac{1}{2},\ bp^2 + cr^2 = \frac{1}{3},\ cps = \frac{1}{6}$$

[2] 다음 계수 값은 위의 계수간 방정식을 만족한다.

a=1/6, b=4/6, c=1/6, p=1/2, r=1, s=2

이로부터 다음과 같은 3 차 Runge Kutta 해가 구해진다.

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[&f(t_i, y_i) + 4f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)) \\ &+f(t_i + h, y_i + 2hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)) - hf(t_i, y_i))] \end{aligned} \qquad (3)$$

식 (3)을 이용하여 다음 상 미분 방정식에 대한 3차 Runge Kutta 해 y(0.2)을 구하라.(10 점)

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 + t\sin[ty(t)],\ t \in [0,2];\ y(0)=0 \qquad (4)$$

단, h=0.1 로 잡아라.

[3] 식 (3) 의 상 미분 방정식의 수치 해를 3 차의 Taylor 해법으로 y(0.1)을 구하라.(10 점)

[4] 식 (2)에 대한 Adams-Moulton 의 3 단계 해를 유도하면 다음과 같다. 이 식을 유도하라. 이 수식의 절단오차 R 은 식 (6)과 같다. 이를 증명하라.(20점)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1,} w_{i+1}) + 19f(t_{i,} w_i) - 5f(t_{i-1,} w_{i-1}) + f(t_{i-2,} w_{i-2})] \quad (5)$$

$$R = -\frac{19}{720} h^5 f^{(4)}(\mu);\ \mu \in (a,b) \quad (6)$$

단, $\int_0^1 ds(s^3 - s)(s+2) = -\frac{19}{720}$ 이다.

[5] 식(4) 의 수치 해를 위의 Adams-Moulton 의 3 단계 해로 구하고자 한다. w(0.1), w(0.2), w(0.3) 등을 이 해법만으로 구할 수 있겠는가 ? 아니면 어떤 도움이 필요한가? 시험문제 중에서 그 방법을 찾는다면 어떤 수단이 가능한가? W(0.3) 을 구하는데 있어서 다른 어려움이 있다면 무엇인가? (10 점)

시험시간 90 분: Good luck.