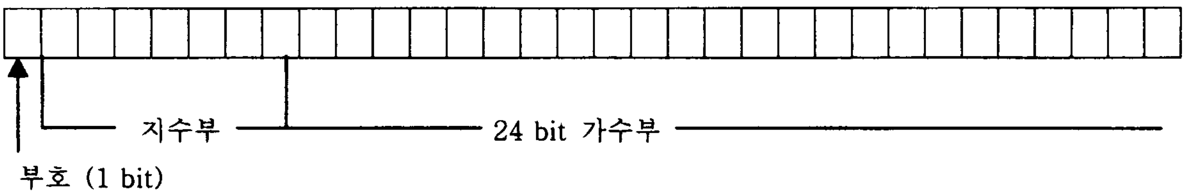
수치해석 기초 중간고사 I 2004.11.18 원자핵 공학과

문제 1. (가) 10 진수로 나타낸 실수 A=9875.36912745 를 2 진수로 나타내시오.

(나) 이 수를 다음그림과 같이 전산기의 32 bit memory location 에 저장하고자 한다. Bit 내에 0 혹은 1 을 채워 넣어시오. 단, + 기호는 1 – 기호는 0 으로 처리한다. 7 bit 지수 영역에는 $64)_{10}+t$ 가 들어간다 (t 는 $A=(\text{가수})2^t$ 일 때 exponent 의 지수를 나타낸다.) 나머지 24 bit 가수부에서는 실수가 24 bit 를 초과하는 수치는 무시한다. (다) 32 bit memory 에 저장된 A 의 근사치를 fl(A) 라 한다. Fl(A)의 절대오차 A-fl(A) 를 구하라. (라) fl(A)의 유효 자리수 (10 진수로 환산) 는 몇자리 인가?



문제 2. (가) 다음 관계식을 증명하시오

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(x_i)$$

단 h 는 등 간격으로 떨어져 있는 점 $x_i, x_{i+n}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}$ 들간의 간격을 나타냄.

(나) 다음 등 간격으로 주어진 (n+1) 개의 점에 대한 Newton 步간 다항식을 차분 상 (divided difference), $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots]$, 을 써서 나타내어라. 또한 차분 연산자 (Δ)를 써서 나타내어라.

x_i	x_{i+1}	x_{i+2}		x_{i+n}
$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+2})$		$f(x_{i+n})$

(다) 다음 표는 어떤 다항식 f(x) 의 점들, 즉 (x, f(x)) 를 나타낸다. $\Delta^t f(x)$ (t=1,2, 3,4,5..) .를 구하고 표를 메워라. 이 다항식의 차수는 ? f(x)를 구하여라.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0	-2	-8	0	64	250	648	1372
$\Delta f(x)$								
$\Delta^2 f(x)$								
$\Delta^3 f(x)$								

문제 3 (가) 중앙 차분 연산자 (δ) 를 써서 다음 미분 공식을 유도하라.

$$\frac{d^2 f(x_j)}{dx^2} = \frac{f(x_{j-1}) - 2f(x_j) + f(x_{j+1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_j) + O(h^4)$$

(나) 전향 차분 연산자 를 써서 다음 Simpson 적분 공식을 유도하시오.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x')dx' = \frac{h}{3}\{f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})\} - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(x_j) + o(h^7)$$

(다) (나)의 Simpson 의 공식을 다음과 같이 하여 유도해 步아라.

(i) 먼저 적분 $I(x) = \int_a^x f(x')dx'$ 를 定의하라.

(ii) $I(x_{j+1}) = I(x_j + h)$ 를 점 x_j를 중심으로 Taylor 전개하면

$$I(x_j + h) = I(x_j) + I'(x_j)h + \frac{h^2}{2}I''(x_j) + \frac{h^3}{3!}I'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}I^{(4)}(x_j) + \frac{h^5}{5!}I^{(5)}(x_j) + \frac{h^6}{6!}I^{(6)}(x_j) + O($$

를 얻을 수 있다. 같은 방식으로 $I(x_{j-1}) = I(x_j - h)$ 를 x_j를 중심으로 Taylor 전개식을 구하고 $I(x_{j+1}) - I(x_{j-1})$ 를 구하라.

문제 4 아래 표의 자료로부터 piecewise Hermite interpolation polynomial $H_{2n+1}(x)$ 을 구하면 다음과 같다

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i(x)f'(x_i)$$

X_0	X_1	X_2		X_n
$f(X_0)$	$f(X_1)$	$f(X_2)$		$F(X_n)$
$f'(X_0)$	$f'(X_1)$	$f'(X_2)$		$f'(X_n)$

(가) $h_0(x)$ $\tilde{h}_0(x)$를 구하라.

(나) $h_1(x)$, $\tilde{h}_1(x)$를 구하라.

참고자료:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots..$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2\cdot3}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdot2n(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots.$$