수치해석 기초 중간고사: 2003. 11.27

문제1: 아래 1계 상미분방정식의 해에 관한 다음 물음에 답하라.(50)

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t,y(t));\ y(t_0) = \alpha$$

(가) Adams-Bashforth 3 단계 해법을 유도하고, 그 절단오차를 구하라.

(나) Adams-Moulton 3 단계 해법을 유도하고, 그 절단오차를 구하라

(다) 다음 상미방을 (가) 와 (나) 의 법으로 풀고자 한다. 단일단계 해법에는 없는 문제점 과 해결방안 그리고 두 해법의 차이에 대해 논하라.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t)+e^t:\ t=(0,1];\ y(0) = 0$$

(라) Milne 3 단계해법으로 (i) 개공식(open formula) (ii) 폐공식 (closed formula) 을 다음 적분에 기초하여 구하고 그 절단오차를 구하라.

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} dy(t) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t,y(t))dt$$

문제 2. 1 계 상미방에 관한 2차 (second-order) Runge-Kutta 수치해의 i 번째해, 즉, 스탭 $(t=t_i)$ 에서의 수치해 U_i 의 오차를 유도하고, 스탭사이즈 h 에 따른 오차 거동을 논하라 (20). 단, $|y'''| \le M$ (M 은 상수) 이고 f(t,y(t)) 는 다음 Lipftschitz 조건을 만족한다.

$$|f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| \le L|y_i - w_i|;\ L=\text{constant}$$

문제 3. central difference operator (δ) 에 관한 다음 물음에 답하라.(30)

(가) δ 을 정의하라.

(나) 다음을 증명하라

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\{\delta^2 f(x)-\frac{1}{12}\delta^4 f(x)+\frac{1}{90}\delta^6 f(x)+...\}$$

단, $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + ...$ 을 이용.

(다) (나)로부터 f''(x) 의 수치계산을 위한 $O(h^4)$의 수치미분공식을 유도하라.