수치해석 기초　중간고사 I　2003. 10. 9

문제 1. 다음 표를 보고 물음에 답하라. (30)

X	0	1	2	3	4	5
f(x)	-7	-4	5	26	65	128

(가) 2차 보간식으로 f(0.7) 을 구하라

(나) 3차 보간식으로 f(0.7) 을 구하라

(다) 4차 보간식으로 f(0.7) 을 구하라

(라) f(x) 는 다항식이다. 몇차 다항식인가?

(마) f(2.5) 를 구하라.

문제 2 다음 표의 자료를 모두 써서 Hermite 보간 다항식으로 f'(1.5) 를 구하라.(20)

x	1	2
F(x)	-1	26
f'(x)	4	73

문제 3. 함수 f(x) 에 대해 n 개 자료점, x_i (i=0,1,...,n) 에서 그 함수치 $f(x_i)$ (i=0,1,2,...,n) 가 알려져 있다. 이들 자료를 써서 함수 f(x) 를 강의노트와는 달리 다음과 같은 식으로 3차 spline 보간 다항식을 유도하고자 한다. 3차 spline 보간 다항식 pp(x) 이 갖는 다음 성질을 참고하여 아래 물음에 답하라. (30)

(i) piecewise polynomial (ii) 3차 다항식 (iii) 1 계 및2 계 미분이 각 자료점에서 연속임.

(가) 소 구간 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 에서 spline 보간 다항식을 기술하는 구간함수 $P_i(x)$ 는 다음식으로 나타낼 수 있다. 그 사유를 설명하라.

$$P_i''(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f''(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f''(x_{i+1}); \; (i=1,2,..,n-1)$$

(단, $P_i''(x)$ 는 $P_i(x)$ 의 2차 도함수; $f''(x_i)$ 와 $f''(x_{i+1})$ 는 f 의 2계 미분계수)

(나) $P_i''(x)$ 를 두번 적분하면

$$P_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} f_i'' + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} f_{i+1}'' + A_i(x_{i+1} - x) + B_i(x - x_i); \; (단, h_i = x_{i+1} - x_i)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 Ai 와 Bi 는 적분상수로 이들 적분상수는 구간 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 에서 성립되는 두 조건, 즉 $P_i(x_i) = f(x_i) = f_i$ 와 $P_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = f_{i+1}$ 을 써서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{i-1}'' + 4f_i'' + f_{i+1}'' = \frac{6}{h^2}(f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}); \; i=1,2,...,n-1$$