

수치해석의 기초 기말고사 2002.12.17

김창효 교수님

문제 1. 아래 2계 상미분 방정식을 WRM 법으로 풀고자 한다. 물음에 답하라. (70)

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi(x)}{dx}\right)+q(x)\phi(x)=S(x); a \leq x \leq b \quad [1]$$

(1) 다음 WRM 방정식을 유도하라

$$(w'(x), p(x)\phi'(x))+(w(x),q(x)\phi(x))=(w(x),S(x)) \quad [2]$$

(2) $\phi(x)$ 를 다음과 같이 piecewise linear interpolation polynomials 으로 근사할수 있다. $\eta_i(x)$ 를 구하라.

단, $\phi_i = \phi(x_i)$ ($i=1,2,\dots,n$)를 나타낸다. 그리고 $\phi(a) = \phi(b) = 0$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \eta_i(x) \quad [3]$$

(3) ϕ_i 를 WRM 식을 이용하여 구하면 다음식을 만족한다.

단, Galerkin weighting 함수를 이용.

$L\phi = S$; L 은 $(n-1) \times (n-1)$ matrix & ϕ 와 S 는 $(n-1)$ 차 벡터이다.

$L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{24}, L_{25}, L_{26}, L_{27}, L_{28}$ 을 구하라. 행렬 L 의 non zero elements 를 구하라.

(4) $\phi(x)$ 를 다음과 같이 piecewise Hermite interpolation polynomials 으로 근사할수

있다
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i H_i(x) + \sum_{i=1}^n \phi_i \widetilde{H}_i(x) \quad [4]$$

$H_i(x), \widetilde{H}_i(x)$ 를 구하라. [4]식을 [2]식에 대입하고 Galerkin 법으로 weighting

function을 선정하면 다음 행렬형의 대수방정식을 얻는다. 행렬 $L_i(i=1,2,3,4)$ 의 non-zero elements 를 논하라. S_1 과 S_2 의 k 번째 요소를 정의하라.

$$L_1\phi + L_2\phi' = S_1 \quad \& \quad L_3\phi + L_4\phi' = S_2$$

문제 2. (30)

(가) 다음 상미분 방정식에 대한 two-step Adams-Moulton 해법과 two-step Adams-Bashforth 해법을 유도하라.

$$y' = f(t, y(t)) \quad ; \quad y(t_0) = y_0$$

단, 구간은 일정하지 않고, $h_i = t_{i+1} - t_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$)로 나타냄.

(나) 두 해법에 대한 계산 알고리즘을 약속하라.