

문제.1 $f(x) = \sin x$ 를 구간 $[0,1]$ 내의 10개 자료점을 이용하여 9차의 보간 다항식으로 근사하고자 한다. 이 구간 내에서 보간 다항식의 오차한계는 ?

문제.2 (x_i, f_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) 이 주어져 있을 때, Cubic spline interpolation은 강의장에서와는 달리 다음과 같이 구할 수도 있다. 먼저 각 자료점에서 (x_i, f_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) 이외에 (x_i, f_i'') ($i = 0, 1, \dots, n$) 이 알려져 있다고 가정한다. 이같이 하면, 구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 에서 $P_i(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_i''(x) = f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (*)$$

(가) 식 (*)를 두 번 적분하고,

$$P_i(x) = \frac{f_i''}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{f_{i+1}''}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

를 보이시오. 단, C와 D는 상수. $h_i = x_{i+1} - x_i$

(나) $P_i(x_i) = f_i$, $P_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$ 조건을 사용하여 C와 D를 구하시오.

(다) 위와 같은 방식을 취하면 $[x_{i-1}, x_i]$ 에서 성립되는 $P_{i-1}(x)$ 을 구할수 있다. $P_{i-1}(x)$ 를 구하라.

(라) Cubic Spline function의 정의에 의해 f_i'' ($i = 1, \dots, n-1$) 가 다음 식을 만족함을 증명하라.

$$h_{i-1}f_{i-1}'' + 2(h_i + h_{i-1})f_i'' + h_i f_{i+1}'' = \frac{b}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{b}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

(마) $f_0'' = f_n'' = 0$ 를 놓고 윗 식 (라)에서 f_i'' ($i = 1, \dots, n$) 를 구하면 Cubic Spline 이 정해지는데 이를 natural cubic spline이라 한다. 다음 함수가 natural cubic spline 여부를 정하라.

$$PP(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3 & x \in [-1, 0] \\ 3 + 5x + 3x^2 & x \in [0, 1] \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

문제.3 다음 표는 함수 $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$ 에서 구한 것이다.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f_i	1.302	1.616	1.954	2.328	2.750

(가) divided difference (차분상) table을 작성하시오

(나) 4차의 차분상은 zero가 됨을 보이시오. 그 이유를 설명하시오.

(다) 3차의 Newton 보간 다항식 $P(x)$ 을 구하시오. 그 오차를 구하시오.